รายงานการวิจัย

เรื่อง

การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดและทฤษฎีของ Feuerbach

รองศาสตราจารย์ ดร.เพียงพบ มนต์นวลปรางค์
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

รายงานการวิจัยฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักวิจัยและพัฒนา
มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปีงบประมาณ 2550

To Proof the Nine-Point Circle Theorem

and Feuerbach's Theorem

Associate Professor Dr. Peiangpob Monnuamprang

Field of Mathematics

Faculty of Education

Valaya Alongkorn Rajabhat University

2007

ชื่อเรื่อง	การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และทฤษฎีของ Feuerbach
ชื่อผู้วิจัย	รองศาสตราจารย์ ดร. เพียงพบ มนต์นวลปรางค์
คณะ	ครุศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัย	ราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
ปีงบประมาณ	2550

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและวิเคราะห์การพิสูจน์ทฤษฎีของวงกลมเก้าจุด และศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach สำหรับการวิเคราะห์การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดโดยในการพิสูจน์ ผู้วิจัย พบว่า จุดทั้งเก้าจุด คือ จุดสามจุดที่เกิดจากจุดฐานของรูปสามเหลี่ยม กับ จุดสามจุดที่เกิดจากจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และจุดสามจุดที่เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากทั้งสามร่วมกับ จุดศูนย์กลาง จุดออร์โทเซนเตอร์ ทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม และการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach โดยวิธีการสลับตำแหน่งวงกลม

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยจากมหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ และ องค์การคณิตศาสตร์ระดับโลก ***CIMPA-JMAMIS-PHILIPPINES*** ที่สนับสนุนทุนวิจัยที่สำคัญยิ่งตลอดการเข้าร่วมประชุมในประเทศฟิลิปปินส์ ตลอดจน รองศาสตราจารย์ ดร. มานะ ขาวเมฆ และอาจารย์คชินทร์ โกกนุทาภรณ์ ที่ให้ความช่วยเหลือในการปรึกษางานวิจัยนี้

เพียงพบ มนต์นวลปรางค์

23 พฤษภาคม 2551

สารบัญ

หน้า

สารบัญภาพ

บทที่ 1

ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดและทฤษฎีของ Feuerbach
(The Nine-Point Circle Theorem and Feuerbach's Theorem)

ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ออยเลอร์เป็นผู้ค้นพบซึ่งเป็นการค้นพบทฤษฎีวงกลมเก้าจุดคนแรก โดยในขณะนั้นยังไม่มีผู้ค้นพบมาก่อน อย่างไรก็ตามความสามารถของออยเลอร์มีหลักฐาน หรืออ้างอิงถึงการเขียนของออยเลอร์ ซึ่งสนับสนุนว่าเป็นบุคคลแรกที่ค้นพบวงกลมเก้าจุด [3],[8]

ในปี ค.ศ. 1821 วงกลมเก้าจุดได้มีการกล่าวถึงใน รายงานประจำปีคณิตศาสตร์ของ Gergonne ฉบับที่ 11 ในบทความ โดย นักคณิตศาสตร์ ชาวฝรั่งเศส โดย ชาร์ส จูเลียน ไบร์ชอน (Charles Julien Brianchon) และวิคเตอร์ พอนซ์เลท (Victor Poncelet) [9] บทความที่ลงตีพิมพ์เกี่ยวกับทฤษฎีสำหรับรูปสามเหลี่ยม จุดกึ่งกลางด้าน เส้นดิ่ง และจุดกึ่งกลางของเส้นร่วมที่ตั้งฉากของรูปสามเหลี่ยม จุดศูนย์กลางที่ตั้งฉากทั้งหมดบนวงกลม โดยที่ นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ เบนจามิน บีแวน (Benjamin Bevan) จัดไว้ในตำแหน่งเฉพาะคล้ายปัญหา เมื่อ 17 ปีก่อนนี้

ในปี ค.ศ. 1822 ได้มีการประกาศทฤษฎีของ Feuerbachs [7],[11],[12],[13] รวมกับการพิสูจน์ที่สัมพันธ์กับวงกลมเก้าจุด เป็นการตีพิมพ์ครั้งแรก ของ คาร์ล วิลเฮม ดริคส์ ฟีเยอร์บาค (Karl Wilhelm Feuerbach ปรากฏใน Eigenschaften einiger merwiirdigen punkie des geradlinigen Dreicks

ต่อมาทฤษฎีพื้นฐานวงกลมเก้าจุดมีการดำเนินการร่วมกันกับส่วนประกอบของเส้นโค้ง แต่ละส่วนของเส้นโค้งที่แสดงตลอดจุดยอดที่แตกต่างกันของรูปสามเหลี่ยม เช่นจุดยอด ค่ากึ่งกลาง และเส้นแบ่งครึ่งของวงกลม [6]

ประกอบกับความรู้ทางพีชคณิตและเรขาคณิตของนักศึกษาในระดับมหาวิทยาลัยมีข้อจำกัดในการสอนของผู้สอน ซึ่งนักศึกษาต้องมีการถูกพัฒนาโดยตระหนักและเพิ่มความสามารถในการพิสูจน์ทฤษฎีและในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต การใช้เรขาคณิตในการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด (Nine-Point Circle Theorem) อาจเป็นเรื่องใหม่ของนักศึกษา

ขณะที่ ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดเป็นส่วนหนึ่งการศึกษาทางคณิตศาสตร์ในมหาวิทยาลัย จนกระทั่งปัจจุบันก็เป็นหัวข้อซึ่งสามารถที่จะเข้าใจได้ง่ายและอาศัยการค้นคว้ากับบางพื้นฐานและเป็นพื้นฐานที่สำคัญในทางเรขาคณิต

ด้วยเหตุผลดังกล่าว ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษาและวิเคราะห์การพิสูจน์ทฤษฎีของวงกลมเก้าจุด โดยแบ่งการพิสูจน์ใน 2 รูปแบบได้แก่ 1. การพิสูจน์ที่เด่นชัด 2. การพิสูจน์แบบวิเคราะห์ [1],[2],[4],[5] ขณะที่การพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach [10] ถูกพิสูจน์โดยใช้หลักการสลับที่กันของวงกลม ในการหาผลเฉลยของปัญหาตามรูปแบบของผู้วิจัย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาและวิเคราะห์การพิสูจน์ทฤษฎีของวงกลมเก้าจุด
2. เพื่อศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach โดยวิธีการสลับตำแหน่งวงกลม

ขอบเขตของการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการพิสูจน์ทฤษฎีของวงกลมเก้าจุดและการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach โดยวิธีการสลับตำแหน่งวงกลม ในระบบ 2 มิติ แม้ว่าการพิสูจน์อื่นๆของทฤษฎีนี้มีอยู่ ผู้วิจัยจะไม่กล่าวถึงทั้งหมดของการพิสูจน์ในงานวิจัยนี้ ในการสร้างรูปทั้งหมดในการวิจัยนี้ใช้ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์

ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษาทฤษฎีพื้นฐานต่างๆทางเรขาคณิต พีชคณิต และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ รูปทรงเรขาคณิต
2. ศึกษา ค้นคว้า และวิเคราะห์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และ ทฤษฎีของ Feuerbachs
3. พัฒนารูปเรขาคณิตในการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และ ทฤษฎีของ Feuerbachs
4. ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการช่วยสร้างรูปเรขาคณิต
5. ศึกษา วิเคราะห์ การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และ ทฤษฎีของ Feuerbachs
6. วิเคราะห์ข้อมูลและสรุปผล
7. รานงานการวิจัย

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้องค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีของวงกลมเก้าจุด
2. ได้องค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach โดยวิธีการสลับตำแหน่งวงกลม
3. เป็นแนวทางในการพิสูจน์ทฤษฎีของวงกลมเก้าจุดและการพิสูจน์ทฤษฎีของ Feuerbach โดยวิธีการสลับตำแหน่งวงกลม

บทที่ 2

เอกสารที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยนี้เป็นการนำเสนอนิยามและทฤษฎีซึ่งในบทนี้ แนวคิดที่ได้มาจาก [11] และ [16]

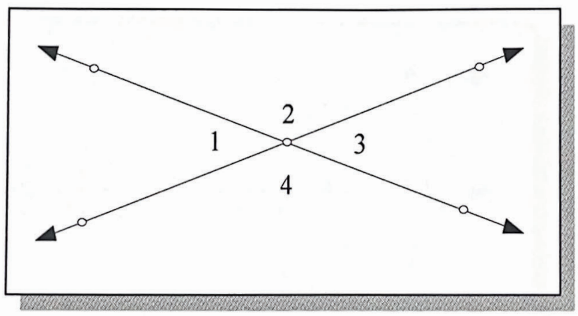
เอกสารที่เกี่ยวข้อง

2.1 มุม

นิยาม 2.1.1 เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

จากรูป 2.1.1 $\angle 1 \cong \angle 3$ และ $\angle 2 \cong \angle 4$

ทฤษฎีบทที่ 2.1.2 มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน



รูปที่ 2.1.1 มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

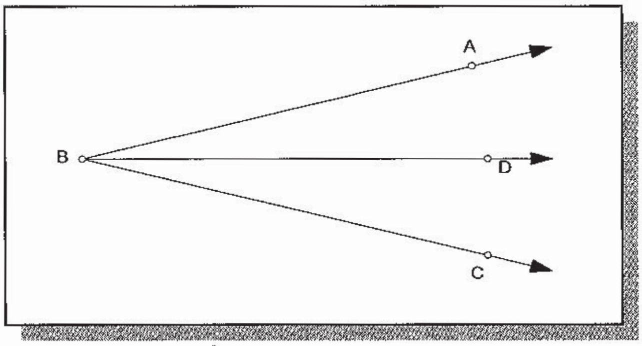
ดังรูป 2.1.1 $\angle 2$ และ $\angle 4$, $\angle 1$ และ $\angle 3$ เป็นมุมตรงข้ามกัน

นิยาม 2.1.3 (เส้นแบ่งครึ่งมุม) รังสี BD ตัดแบ่งมุม ABC เป็นสองส่วน

ถ้า

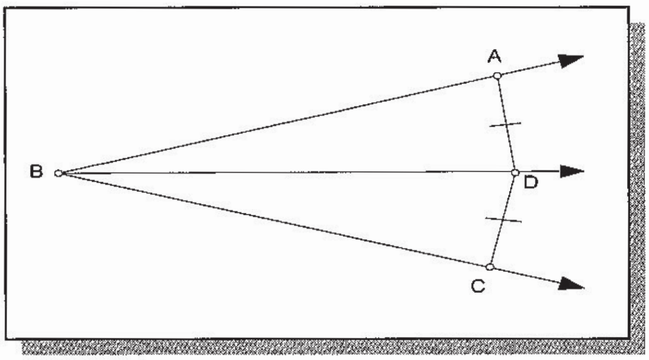
1. จุด D อยู่ภายใน $\angle ABC$ และ

2. $\angle ABD \cong \angle DBC$



รูปที่ 2.1.2 $\angle ABD \cong \angle DBC$

ทฤษฎีบท 2.1.4 เส้นแบ่งครึ่งมุมหักจุดปลายออกเป็นเซตของจุดทั้งหมดของมุมภายในซึ่งระยะห่างของด้านเท่ากันจากด้าน



รูปที่ 2.1.3 D อยู่ภายในของ $\angle ABC$ และมีช่วงห่างด้านเท่ากันจากด้าน $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$

ถ้า D อยู่ภายใน $\angle ABC$ และ D มีช่วงห่างด้านเท่ากันจากด้าน $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$, ดังนั้น D เป็นจุดแบ่งกึ่งกลางของมุม และ $D \neq B$, ดังนั้น D อยู่ภายในของ $\angle ABC$ และมีช่วงห่างด้านเท่ากันจากด้าน $\overrightarrow{BA}$ และ $\overrightarrow{BC}$

2.2 เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก

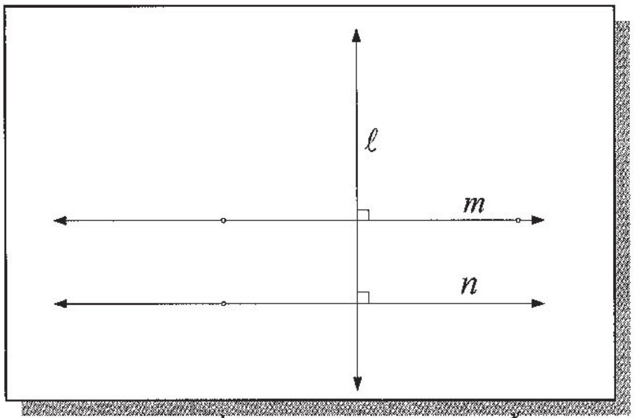
ทฤษฎีบท 2.2.1 เส้นขนานเป็นความสัมพันธ์เทียบเท่ากัน

(1) (คุณสมบัติสะท้อน) ทุกๆเส้นตรง l ขนานกับตัวเอง

(2) (คุณสมบัติสมมาตร) ถ้า l ขนานกับ m แล้ว m ขนานกับ l

(3) (คุณสมบัติการถ่ายทอด) ถ้า l ขนานกับ m และ m ขนานกับ n แล้ว l ขนานกับ n

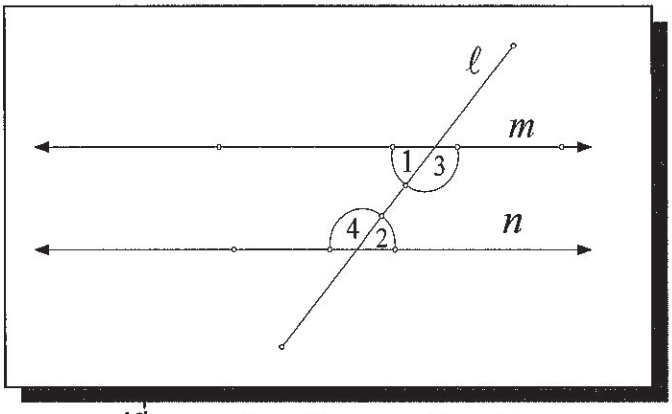
ทฤษฎีบท 2.2.2 เส้นตรงเส้นหนึ่งลากตั้งฉากกับเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันจะตั้งฉากกับเส้นตรงเส้นอื่นด้วย



รูปที่ 2.2.1 m และ n เป็นเส้นที่ขนานกัน และเส้นตรง l ตั้งฉากกับเส้นตรง m

ถ้า m และ n เป็นเส้นที่ขนานกัน และถ้า เส้นตรง l ตั้งฉากกับเส้นตรง m แล้วเส้นตรงนี้จะตั้งฉากกับเส้นตรง n ด้วย

ทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน ถูกตัดโดยเส้นขวางแล้วทุกคู่ของมุมภายในสลับกันย่อมเท่ากัน

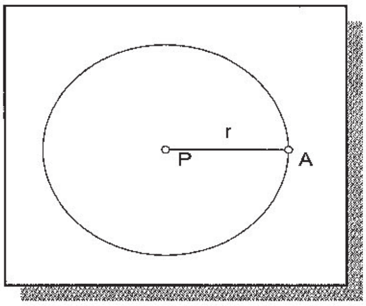


รูปที่ 2.2.2 $\angle 1 \cong \angle 2$ และ $\angle 3 \cong \angle 4$.

ซึ่งถ้าเส้นตรง m ขนานกับเส้นตรง n และถูกตัดขวางด้วยเส้นตรง ℓ แล้ว $\angle 1 \cong \angle 2$ และ $\angle 3 \cong \angle 4$.

2.3 วงกลม

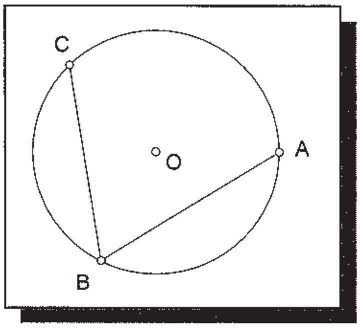
นิยาม 2.3.1 วงกลมวงหนึ่งเป็นเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่กำหนดระยะห่างจากจุดที่กำหนดให้ในระนาบ จุดที่กำหนดให้เรียกว่าจุดศูนย์กลาง และกำหนดระยะห่างเรียกว่า รัศมีของวงกลม



รูปที่ 2.3.1 P เป็นจุดศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมีของวงกลม

ในรูป 2.3.1 P เป็นจุดศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมีของวงกลม ถ้า A เป็นจุดทุกจุดบนวงกลม แล้ว ส่วนของเส้นตรง $\overline{PA}$ เป็นรัศมีของวงกลม r และ A เรียกว่า จุดภายนอก วงกลมวงหนึ่งถูกบรรจุโดยจุดศูนย์กลางและรัศมี หรือ โดย จุดที่แตกต่างกัน 3 จุดบนวงกลม

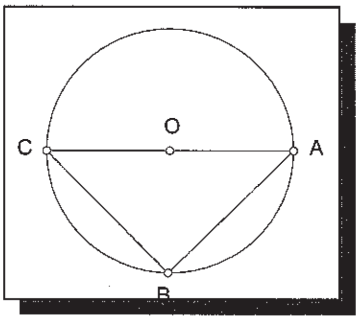
ทฤษฎีบท 2.3.2 วงกลมวงหนึ่ง ขนาดของมุมภายในส่วนโค้งเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นโค้ง



รูปที่ 2.3.2 $\angle CBA$ เป็นมุมภายในส่วนโค้ง AC

กำหนดวงกลมในรูป 2.3.2 ถ้า $\angle CBA$ เป็นมุมภายในส่วนโค้ง AC แล้ว $m\angle CBA = \frac{1}{2} m\ \overset{\frown}{AC}$.

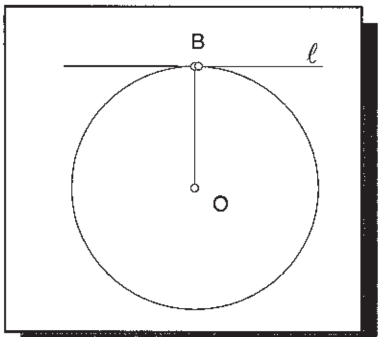
บทแทรก 2.3.3 มุมภายในครึ่งวงกลมเป็นมุมทางขวา



รูปที่ 2.3.3 $m\angle ABC = 90°$

ในรูป 2.3.3 $m\angle ABC = 90°$ เพราะว่า เป็นมุม ครึ่งวงกลม ABC

ทฤษฎีบท 2.3.4 ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลมภายนอกเป็นรัศมีของวงกลม

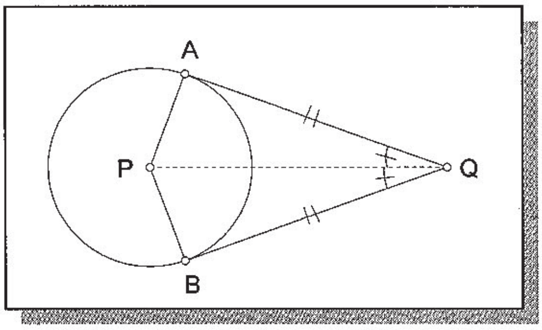


รูปที่ 2.3.4 ℓ ตั้งฉากกับรัศมี OB ที่ B

ในรูป 2.4.4 ℓ ตั้งฉากกับรัศมี $\overline{OB}$ ที่ B แล้ว ℓ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่ B

ทฤษฎีบท 2.3.5 เส้นสัมผัสทุกเส้นของวงกลมเป็นเส้นตั้งฉากกับรัศมีที่จุดเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.3.6 (ทฤษฎีเส้นสัมผัสสองเส้น) เส้นสัมผัสวงกลมสองเส้นจากจุดภายนอกเท่ากันและส่วนของเส้นตรงจากจุดภายนอกถึงจุดศูนย์กลางจะทำมุมเท่ากัน



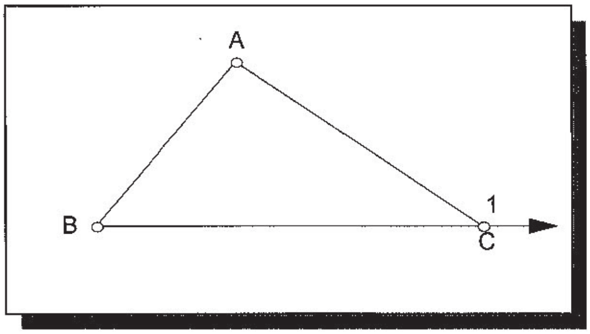
รูปที่ 2.3.5 $\angle PQA \cong \angle PQB.$

กำหนดให้วงกลมวงหนึ่ง ที่มีจุดศูนย์กลาง P และจุด Q เป็นจุดอยู่บนภายนอกของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง P; ถ้า $\overline{QA}$ และ $\overline{QB}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่ A และ B ตามลำดับ แล้ว $QA = QB$ และ $\angle PQA \cong \angle PQB.$

ทฤษฎีบท 2.3.7 (ทฤษฎีกำลังเส้นสัมผัสส่วนโค้งมากกว่า 2 จุด) ให้เส้นสัมผัสส่วนโค้ง $\overline{QT}$ กับวงกลมวงหนึ่งและส่วนโค้ง Q ร่วมกับวงกลมที่จุด R และ S แล้ว $(QR)(QS) = (QT)^2$

2.4 รูปสามเหลี่ยม

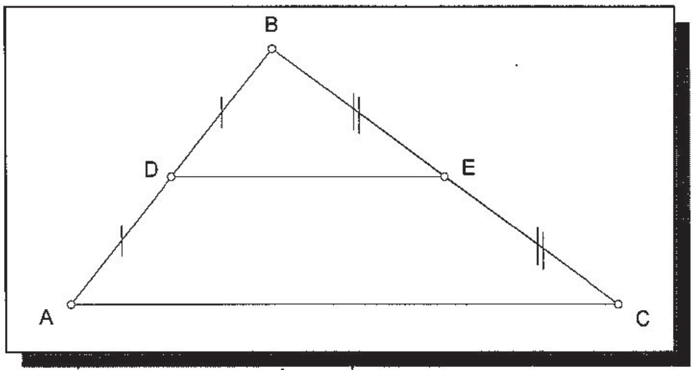
ทฤษฎีบท 2.4.1 (มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม) มุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมเป็นมุมที่เส้นตรงสองเส้นของรูปสามเหลี่ยมทำมุมกัน



รูปที่ 2.4.1 $\angle 1$ เป็นมุมภายนอกของ $\Delta ABC.$

อ้างถึง รูป 2.4.1 $\angle 1$ เป็นมุมภายนอกของ $\Delta ABC.$

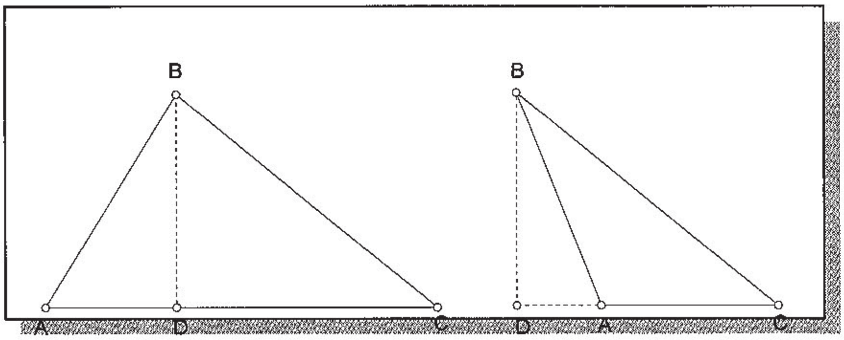
ทฤษฎีบท 2.4.2 ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสองของรูปสามเหลี่ยม แล้วความยาวของส่วนของเส้นตรงเป็นครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม



รูปที่ 2.4.2 D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$

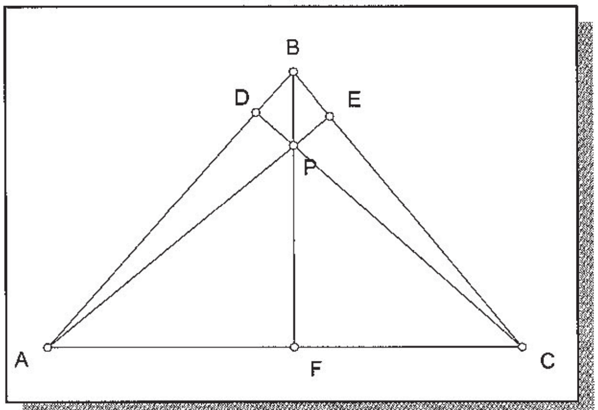
ซึ่ง ถ้า D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ แล้ว $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ และ $DE = \frac{1}{2}AC$

ทฤษฎีบท 2.4.3 เส้นดิ่งของรูปสามเหลี่ยมเป็นส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นตั้งฉากจากจุดยอดรูปสามเหลี่ยมบรรจุด้วยเส้นตรงที่อยู่ด้านตรงข้าม จุดของส่วนของเส้นตั้งฉากที่อยู่ด้านตรงข้ามเรียกว่า ฐานของเส้นดิ่ง แต่ละรูปข้างล่างด้าน $\overline{BD}$ เป็นเส้นดิ่งของ ΔABC D เป็นจุดฐานของเส้นดิ่ง



รูปที่ 2.4.3 $\overline{BD}$ เป็นเส้นดิ่งของ ΔABC

ทฤษฎีบท 2.4.4 ***(ทฤษฎีเส้นดิ่งที่กระทำร่วม)*** เส้นดิ่งทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมที่กระทำร่วมกัน ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยม ΔABC, เส้นดิ่ง $\overline{AE}, \overline{BF}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกันที่จุด P

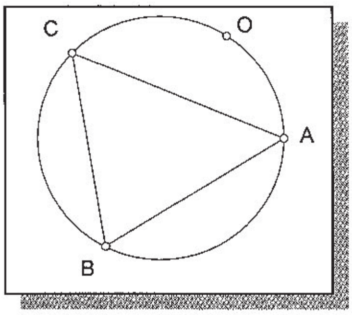


รูปที่ 2.4.4 เส้นดิ่ง $\overline{AE}, \overline{BF}$ และ $\overline{CD}$ ตัดกันที่จุด P

จุดตัดของเส้นดิ่งของรูปสามเหลี่ยม *เรียกว่า จุดศูนย์กลาง*

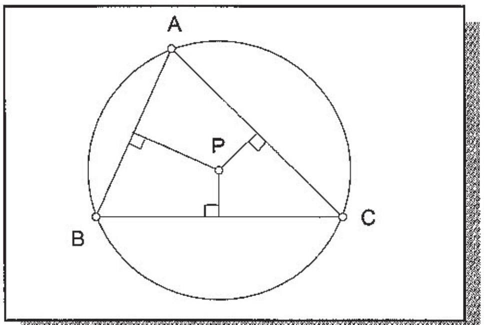
รูปสามเหลี่ยมโดยฐานทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม *เรียกว่า ฐานของรูปสามเหลี่ยม* ΔABC

นิยาม 2.4.5 วงกลมที่มีข้อจำกัดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม ถ้าแต่ละจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมอยู่บนวงกลม กล่าวว่า O เป็นจุดบนวงกลม ภายนอก ΔABC หรือ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมภายในวงกลม Oและ O เรียกว่า จุดภายนอกวงกลมของ ΔABC



รูปที่ 2.4.5 O เป็นจุดภายนอกวงกลมของ ΔABC

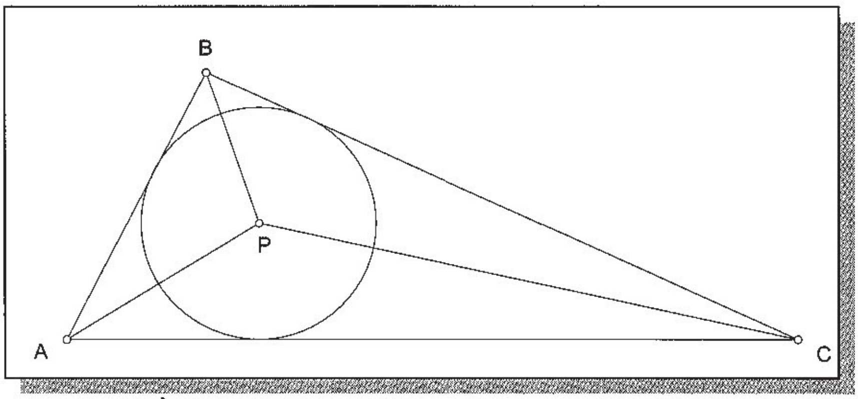
ทฤษฎีบท 2.4.6 เส้นตั้งฉากเส้นแบ่งครึ่งด้านของสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดหนึ่งภายในซึ่งเป็นระยะห่างที่เท่ากันทั้งสามจากจุดยอด จุดนี้ เรียกว่าจุดศูนย์กลางภายในรูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.4.6 จุด P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ΔABC

ในรูป 2.4.6 เส้นตั้งฉากทั้งสามแบ่งครึ่งด้านของ ΔABC ตัดกันที่จุด P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ΔABC

ทฤษฎีบท 2.4.7 เส้นแบ่งครึ่งมุมเของรูปสามเหลี่ยมตัดกันที่จุดจุดหนึ่งเป็นระยะห่างที่เท่ากันจากด้านทั้งสาม เรียกจุดนั้นว่า จุดศูนย์กลางภายในของรูปสามเหลี่ยม ภายในวงกลมที่มีรูปสามเหลี่ยมเป็นเส้นสัมผัสทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 2.4.7 P จุดศูนย์กลางของวงกลมภายในของ ΔABC

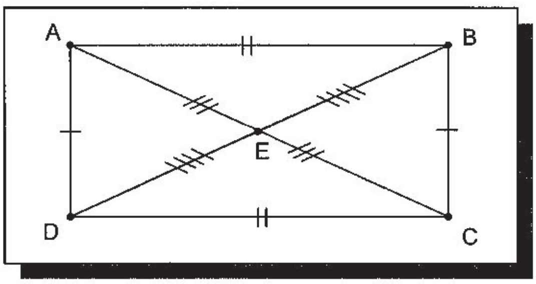
ในรูป 2.4.7 เส้นแบ่งครึ่งทั้งสามตัดกันภายใน ที่จุดศูนย์กลาง P จุดศูนย์กลางของวงกลมภายในของ ΔABC

2.5 รูปสี่ด้าน

นิยาม 2.5.1 รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันสองคู่ เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

นิยาม 2.5.2 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบรรจุที่มุมทางขวามีขนาดน้อยที่สุดเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ทฤษฎีบท 2.5.3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานด้านตรงข้ามสองด้านมีขนาดเท่ากัน เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานจะแบ่งครึ่งด้านแต่ละด้าน



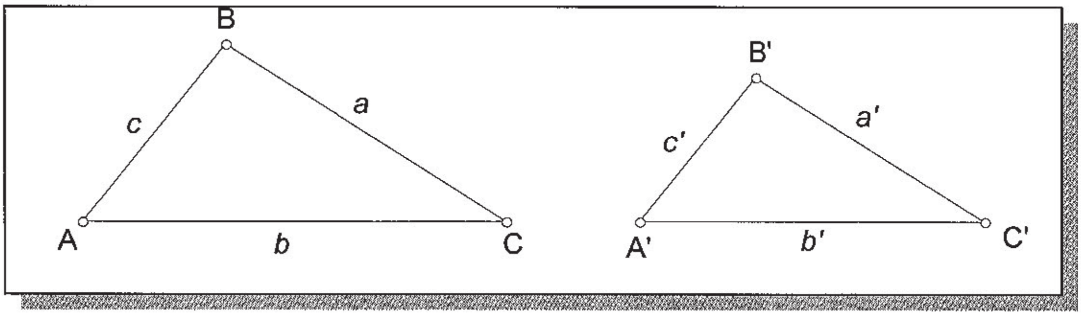
รูปที่ 2.5.3 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$

ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$, $\overline{AE} \cong \overline{CE}$, $\overline{BE} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

นิยาม 2.5.4 ส่วนประกอบของรูปสี่เหลี่ยม เป็นเซตของจุดสี่จุด A, B, C, D ในวงกลมตามลำดับ ร่วมกับส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ร่วมกัน. ส่วนของเส้นตรง $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยม

2.6 รูปสามเหลี่ยมคล้าย

นิยาม 2.6.1 (รูปสามเหลี่ยมคล้าย) ให้สามเหลี่ยมสองรูปสอดคล้องกัน ถ้ามุมสอดคล้องกันเท่ากันและด้านสอดคล้องกันเป็นสัมพันธ์กัน แล้วความสอดคล้อง เรียกว่า คล้ายกัน และ รูปสามเหลี่ยมกล่าวว่า คล้ายกัน



รูปที่2.6.1 $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta A'B'C'$

ซึ่ง กำหนดให้ความสอดคล้อง $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta A'B'C'$ ระหว่าง ΔABC และ $\Delta A'B'C'$

ถ้า

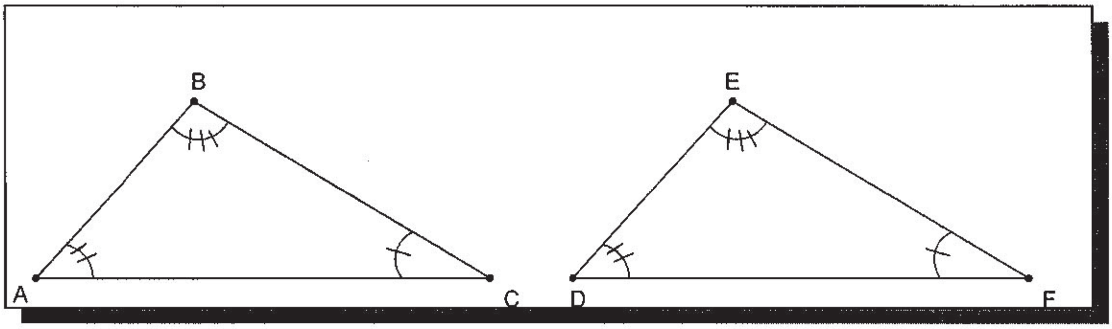
$$(1)\ \angle A \cong \angle A',\ \angle B \cong \angle B',\ \angle C \cong \angle C'$$

และ

$$(2)\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

แล้ว ความสอดคล้อง $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta A'B'C'$ คล้ายกัน เขียนแทนด้วย $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

ทฤษฎีบท 2.6.2 (AAA คล้ายกัน) รูปสามเหลี่ยมสอดคล้องกันสองรูป ถ้ามุมทั้งสามเท่ากัน แล้วสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน

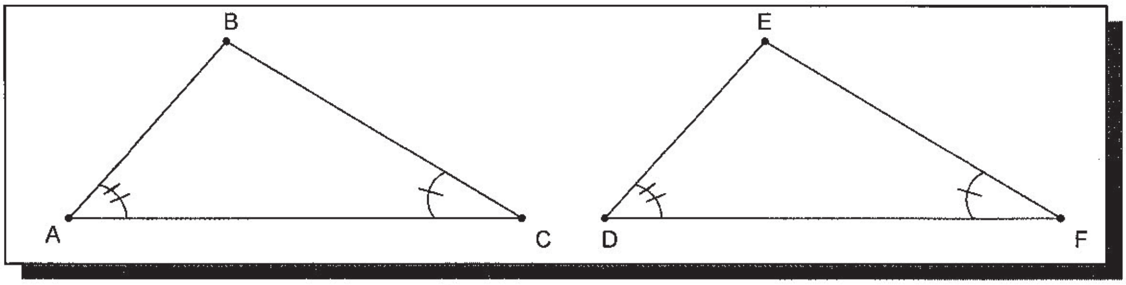


รูปที่ 2.6.2 $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ในรูป 2.6.2 กำหนดให้ $ABC \leftrightarrow DEF$ ระหว่าง ΔABC และ ΔDEF สอดคล้องกัน

ถ้า $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ และ $\angle C \cong \angle F$, แล้ว $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

บทแทรก 2.6.3 (AA คล้ายกัน) ให้ความสอดคล้องระหว่างรูปสามเหลี่ยมสองรูป ถ้ามีมุมสองคู่เท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมทั้งสองจะคล้ายกัน



รูปที่ 2.6.3 $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ในรูป 2.6.3 กำหนดความสอดคล้อง $ABC \leftrightarrow DEF$, ถ้า $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ และ $\angle C \cong \angle F$, แล้ว $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

2.7 การวิเคราะห์ทางเรขาคณิต

นิยาม 2.7.1 ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นระยะห่างจุดของเส้นตรง l_1 ซึ่งไม่ขนานกับแกน y แล้วความชันของ l_1 แทนด้วย m กำหนดในรูป

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

ทฤษฎีบท 2.7.2 สมการเส้นตรงที่ไม่ตั้งฉาก ผ่านตลอดที่จุด $P_0(x_0, y_0)$ และมีความชัน

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

ถ้าสมการที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เลือกจุด (o,b) สำหรับ จุด (x_0, y_0) จะได้

$$y = mx + b$$

ทฤษฎีบท 2.7.3 สมการของเส้นตั้งฉาก ตัดเส้นแกน x ที่ a เป็น $x = a$.

ทฤษฎีบท 2.7.4 เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ตั้งฉากกัน l_1 และ l_2 มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ เป็นเส้นตั้งฉาก ถ้า $m_1 m_2 = -1$.

นิยาม 2.7.5 กำหนดให้ ระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็น

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ทฤษฎีบท 2.7.6 สมการของวงกลมของรัศมี r กับจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ (h,k) เป็น

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

2.8 ตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบท 2.8.1 (กฎของไซค์) ถ้า A, B, C เป็นมุมของรูปสามเหลี่ยม และ a, b, c, เป็นด้านตรงข้ามมุม ตามลำดับ แล้วความยาวด้านตรงข้ามมุมมีรูปเป็น

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

บทที่ 3

ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด

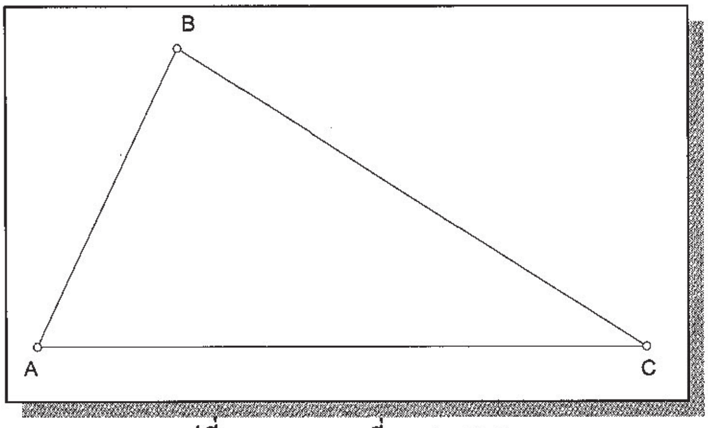
THE NINE-POINT CIRCLE THEOREM

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาทฤษฎีวงกลมเก้าจุดและนำเสนอการพิสูจน์ในสองรูปแบบ โดยผู้วิจัยเสนอแนวทางในการพิสูจน์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1 (ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด) ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม ฐานของส่วนสูงทั้งสามและจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากทั้งสามร่วมกัน จุดศูนย์กลาง จุดออร์โทเซนเตอร์ทั้งหมดบนวงกลม

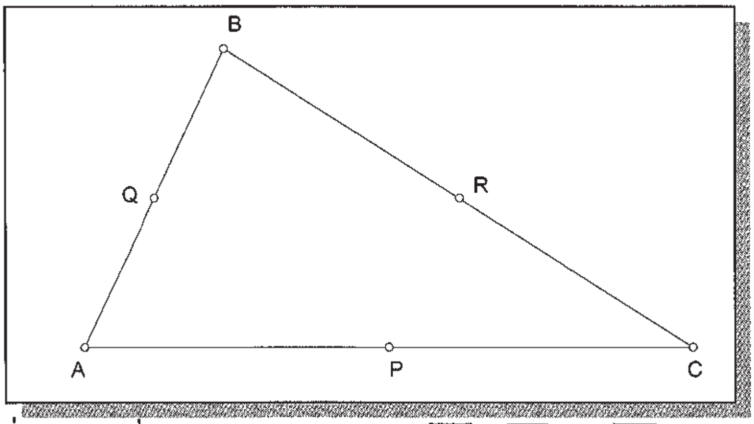
3. 1 วงกลมเก้าจุด

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ΔABC



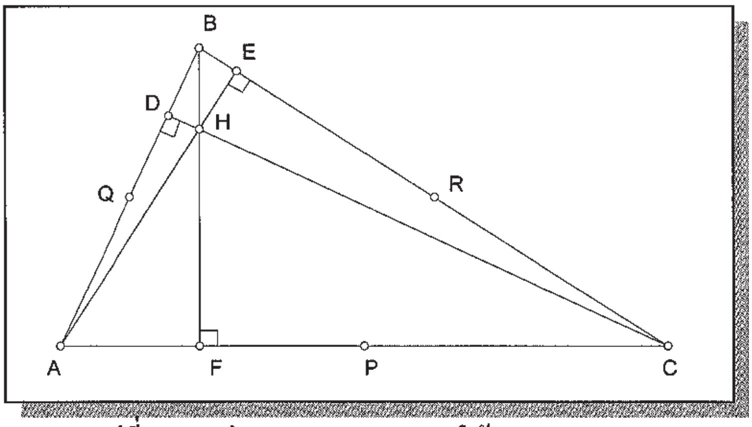
รูปที่ 3.1.1 สามเหลี่ยม ΔABC

สร้างจุดกึ่งกลาง P, Q, R ของด้าน $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ของ ΔABC ตามลำดับ



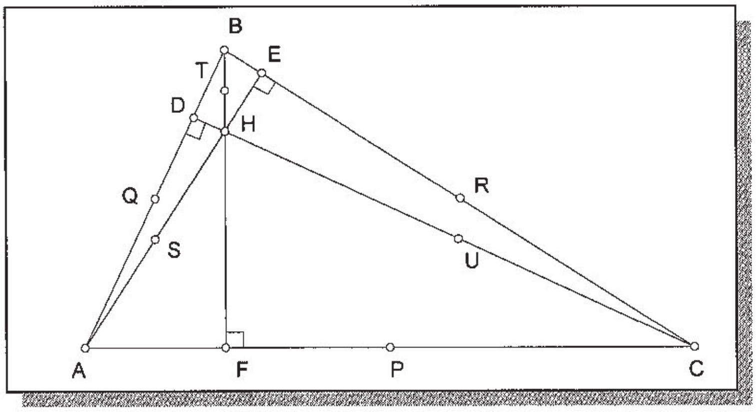
รูปที่ 3.1.2 จุดกึ่งกลาง P, Q, R ของด้าน $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ของ ΔABC

สร้างส่วนสูงของ ΔABC ให้ D, E และ F เป็นฐานของส่วนสูงจาก C ถึง $\overline{AB}$, A ถึง $\overline{BC}$ และ B ถึง $\overline{AC}$ ตามลำดับ จุดร่วมของส่วนสูงทั้งสาม ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางร่วมของ ΔABC เรียกว่า H



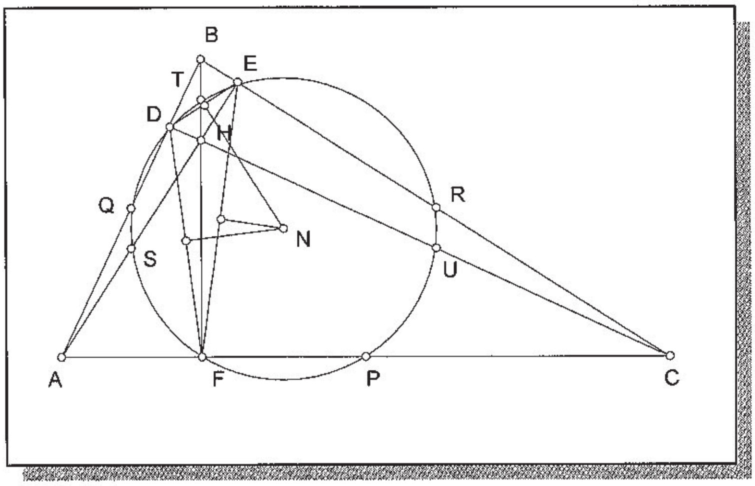
รูปที่ 3.1.3 ส่วนสูงของ ΔABC ให้ D, E และ F

สร้าง S, T, U เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ และ $\overline{HC}$ ตามลำดับ



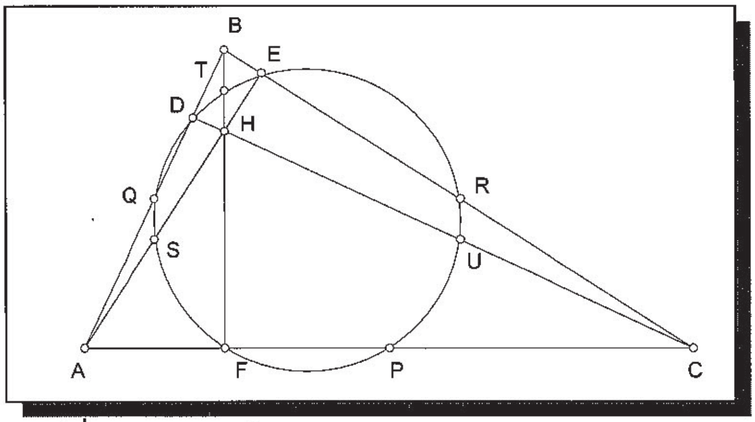
รูปที่ 3.1.4 S, T, U เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ และ $\overline{HC}$ ตามลำดับ

วงกลมเก้าจุดถูกกำหนดโดยการสร้างรูปสามเหลี่ยมพีเดล ΔDEF แบ่งครึ่งเส้นตั้งฉากของ ΔDEF ตัดกันที่จุด N ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด วงกลมเก้าจุดเป็นวงกลมล้อมของรูปสามเหลี่ยมพีเดล



รูปที่ 3.1.5 วงกลมเก้าจุดผ่านตลอดจุดทั้งเก้า P, Q, R, D, E, F, S, T และ U

วงกลมเก้าจุดผ่านตลอดจุดทั้งเก้า P, Q, R, D, E, F, S, T และ U



รูปที่ 3.1.6 วงกลมเก้าจุดและจุด *P, Q, R, D, E, F, S, T และ U*

สำหรับงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ซึ่งกำหนดให้รูปแบบและแสดงในรูป 3.1.6 ซึ่งเกี่ยวกับวงกลมเก้าจุดและจุด *P, Q, R, D, E, F, S, T และ U*

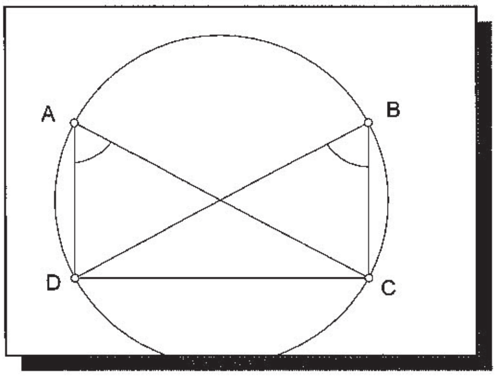
3.2 การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด

ผู้วิจัยแสดงการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด ประเด็นแรกเป็นการพิสูจน์เชิงสัจพจน์ในธรรมชาติ (Axiomatic in nature) เป็นที่ยอมรับจาก [6] ประเด็นที่สองเป็นวิเคราะห์การพิสูจน์ จาก [12] ในลำดับแรกเป็นการพิสูจน์ของทฤษฎีวงกลมเก้าจุด โดยกำหนดบทแทรกตามลำดับ ดังนี้

บทแทรก 3.2 กำหนดให้ *A, B, C และ D* เป็นจุด 4 จุดบนระนาบ ขนาดของด้านทั้งสองเท่ากับ $\overline{CD}$ ที่ *A, B,* แล้ว *A, B, C,D* อยู่บนวงกลมวงหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\angle DAC \cong \angle DBC$

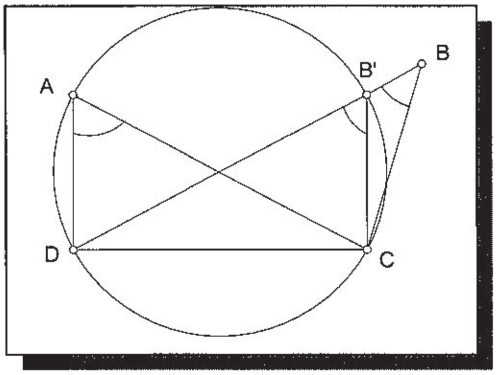
ถ้า A,B,C,D อยู่บนวงกลม แล้ว ทฤษฎีบท 2.3.2 ดังนั้น $\angle DAC \cong \angle DBC$ เนื่องจากสามเหลี่ยมคล้ายทั้งสอง รองรับส่วนโค้ง $\overset{\frown}{DC}$ ที่เท่ากัน

พิสูจน์:



รูปที่ 3.2.1 A, B, C และ D เป็นจุด 4 จุดบนระนาบ

บทกลับ สมมติให้ $\angle DAC \cong \angle DBC$. สร้างวงกลมคลอด A,D,C และให้ตัดวงกลมพบเส้นตรง BD ที่ B'.

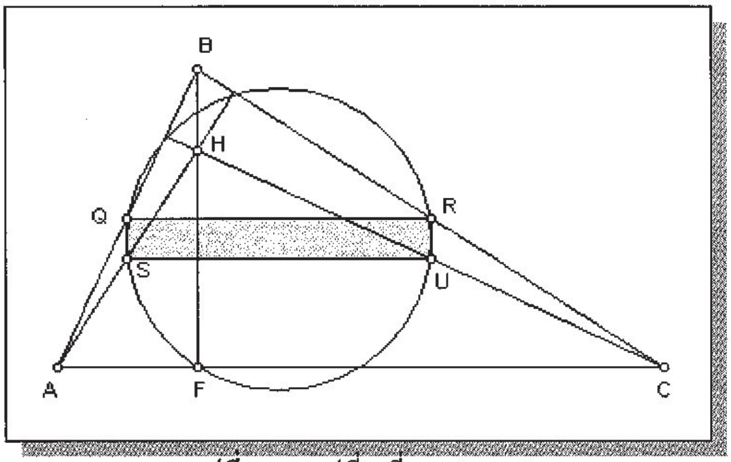


รูปที่ 3.2.2 วงกลมคลอด A,D,C และให้ตัดวงกลมพบเส้นตรง BD ที่ B'.

โดยทฤษฎีบท 2.3.2 , $\angle DB'C \cong \angle DAC$ และ $\angle DB'C \cong \angle DBC$ โดยการถ่ายทอด ขณะที่ ให้ $B \neq B'$ แล้ว $\angle DB'C$ ที่ B' เป็นมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม $\Delta BCB'$และ ดังนั้น $m\angle DB'C > m\angle DBC$ ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $B = B'$ และจุดทั้งสี่ A,B,C,D อยู่บนวงกลม

■

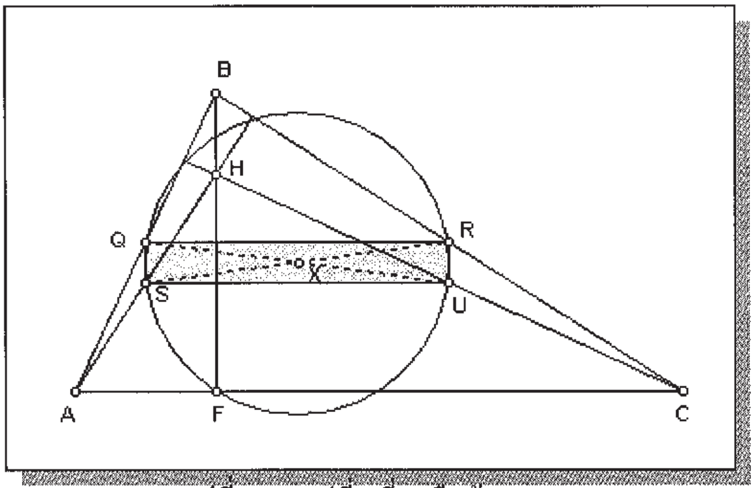
ประเด็นแรกพิสูจน์:



รูปที่ 3.2.3 รูปสี่เหลี่ยม $QRUS$

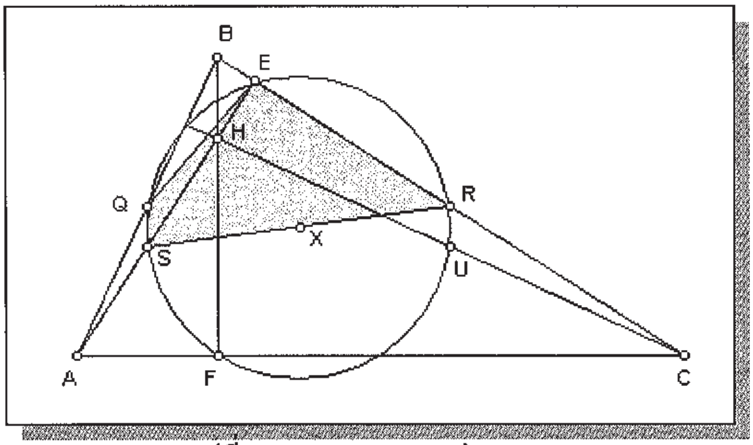
พิจารณา รูปสี่เหลี่ยม $QRUS$ ที่กำหนดให้ ในรูป 3.2.1 ผู้วิจัยใช้ทฤษฎีบท 2.4.2 ประยุกต์กับ ΔABC, $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$ เนื่องจาก Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ ประยุกต์กับ ΔAHC ผู้วิจัยพบว่า $\overline{SU} \parallel \overline{AC}$ ที่ S และ U เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AH}$ และ $\overline{CH}$ ตามลำดับ โดยการถ่ายทอด $\overline{SU} \parallel \overline{AC}$ และ $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$ ดังนั้น $\overline{SU} \parallel \overline{QR}$ ในการประยุกต์ทฤษฎีบท 2.4.2 กับ ΔCBH ผู้วิจัยพบว่า $\overline{RU} \parallel \overline{BH}$ เนื่องจาก U และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{HC}$ และ $\overline{BC}$ ตามลดับ การคล้ายกับ ΔABH, $\overline{QS} \parallel \overline{BH}$ ที่ S และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AH}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ $\overline{RU} \parallel \overline{BH}$ และ $\overline{QS} \parallel \overline{BH}$ ดังนั้น $\overline{RU} \parallel \overline{QS}$ เพราะฉะนั้น $QRUS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ขณะที่ สังเกตว่า $\overline{BF} \perp \overline{AC}$ โดยทฤษฎีบท 2.2.2, $\overline{BF} \perp \overline{SU}$ เพราะว่า $\overline{SU} \parallel \overline{AC}$ นอกจากนี้ $\overline{BF} \parallel \overline{QS}$ การใช้การอ้างเหตุผล $\overline{QS} \perp \overline{SU}$ ดังนั้น $QRUS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า



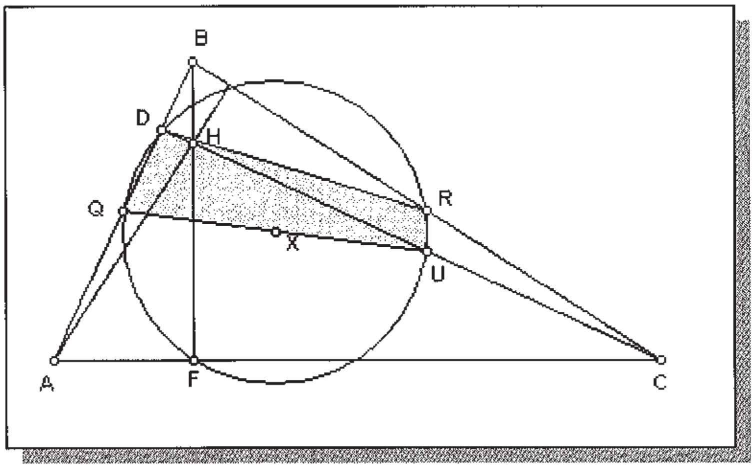
รูปที่ 3.2.4 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $QRUS$

ในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $QRUS$ ให้ X เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม $\overline{QU}$ และ $\overline{SR}$ เพราะ $QRUS$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ผู้วิจัยพบว่า $QX = XU = SX = XR$ ดังนั้น Q, R, U, S อยู่บนวงกลม Γ ที่จุดศูนย์กลาง X



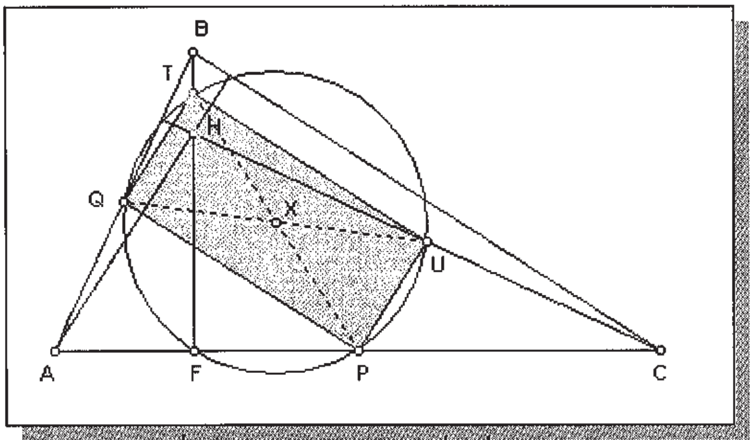
รูปที่ 3.2.5 Q, E, R, S อยู่บนวงกลม

นอกจากนั้น โดยบทแทรก 3.2 Q, E, R, S อยู่บนวงกลม เพราะว่ามุม $\angle SQR$ และ $\angle SER$ รองรับ $\overline{RS}$ เป็นมุมฉากทั้งสองมุม ข้อสังเกต $\overline{SE} \perp \overline{ER}$ และ $\angle SER$ เป็นมุมฉาก เหมือนกับ $\angle SQR$ รองรับเส้นผ่าศูนย์กลาง $\overline{RS}$ ของวงกลม Γ เพราะว่าวงกลมถูกกำหนดโดยจุด 3 จุด วงกลมนี้มีขนาดเท่ากับวงกลม Γ กรณีอื่นเหมือนกัน E อยู่บนวงกลม Γ



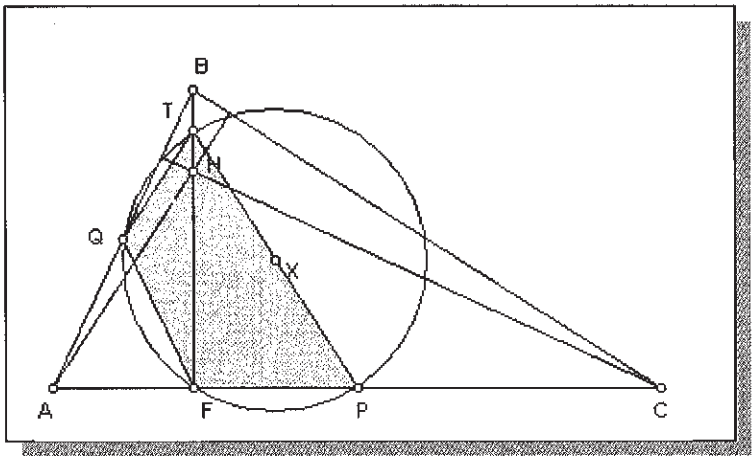
รูปที่ 3.2.6 *Q, D, R, U* อยู่บนวงกลม

เหตุผลที่คล้ายกัน *Q, D, R, U* อยู่บนวงกลมเหมือนกัน $\angle UDQ$ และ $\angle QRU$ รองรับ $\overline{QU}$ เป็นมุมฉากเหมือนกัน $\overline{UD} \perp \overline{DQ}$; $\angle QRU$ รอแงรับเส้นผ่าศูนย์กลาง $\overline{QU}$ ของวงกลม Γ ดังนั้น D เหมือนกันอยู่บนวงกลม Γ



รูปที่ 3.2.7 *QTUP* เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ขณะที่ สลับรูปภาพ ดังนั้น $\overline{BC}$ ถูกพิจารณาบนฐานของรูปสามเหลี่ยม เหตุผลเดียวกันกับข้างต้นแสดงว่า *QTUP* เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดตัดกันเส้นทแยงมุมร่วมกันที่จุด X เพราะ X เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{QU}$ ดังนั้น T, P อยู่บนวงกลม Γ



รูปที่ 3.2.8 *Q, F, P, T* อยู่บนวงกลม

สุดท้าย *Q, F, P, T* อยู่บนวงกลม เพราะว่า $\angle TQP$ และ $\angle TFP$ รองรับ $\overline{PT}$ เป็นมุมฉาก ข้อสังเกต $\overline{TF} \perp \overline{FP}$ และ $\angle TFP$ เป็นวงกลม นอกจากนั้น $\angle TQP$ รองรับเส้นผ่าศูนย์กลาง $\overline{TP}$ ของวงกลม Γ วงกลมบรรจุ *Q, F, P, T* เหมือนวงกลม Γ และดังนั้น F อยู่บนวงกลม Γ ดังนั้น จุดทั้งเก้า *P, Q, R, D, E, F, S, T,* และ *U* ทั้งหมดบน Γ และทฤษฎีถูกพิสูจน์ ■

ก่อนกลางคริตศตวรรษที่ 17 นักคณิตศาสตร์ได้คิดค้นพบความสอดคล้องระหว่างระนาบและคู่อันดับของ จำนวนจริง หรือพิกัด ซึ่งนำการวิเคราะห์เรขาคณิตมาพัฒนา ความสำคัญของการพัฒนาเส้นเรขาคณิตและเส้นโค้งสามารถถูกอธิบายการใช้สมการในสองตัวแปรและปัญหาทั้งหมดของรูปทรงเรขาคณิตสามารถศึกษาการใช้วิธีของพีชคณิตและการจำแนก การจำแนกรูปเรขาคณิตให้ผู้วิจัยเครื่องมือใหม่สำหรับการแก้ปัญหารูปเรขาคณิต

ในการวิจัยนี้ ผู้วิจัยใช้การจำแนกเรขาคณิตพิสูจน์ทฤษฎีบทวงกลมเก้าจุด

การพิสูจน์ในประเด็นที่สอง :

ผู้วิจัยเริ่มโดยให้รายการของขั้นตอนทั่วไปที่จำเป็นสำหรับการพิสูจน์

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ΔABC บนระบบพิกัด ในทางที่ดีกว่าซึ่งจะช่วยพีชคณิต
2. หาสมการสำหรับเส้นดิ่งของรูปสามเหลี่ยม

3. หาพิกัดของฐาน D, E, F ของเส้นดิ่งและพิกัดของจุดศูนย์กลาง H

4. หาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมของรูปสามเหลี่ยมพีดัล ΔDEF

5. หาสมการสำหรับวงกลมของรูปสามเหลี่ยมพีดัล

6. ตรวจสอบฐานทั้งสาม D, E, F อยู่บนวงกลมนี้

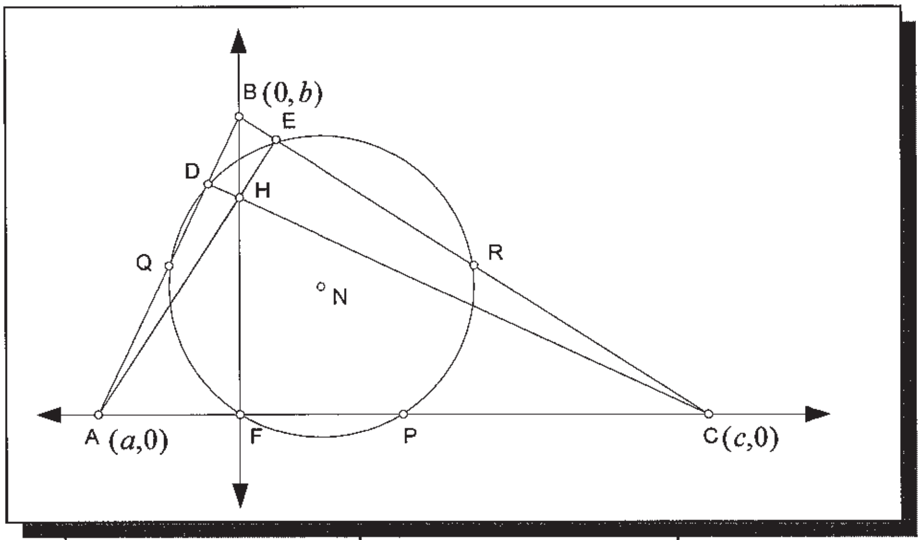
7. ตรวจสอบจุดกึ่งกลางทั้งสาม P, Q, R *ของด้านที่อยู่บนวงกลมนี้*

8. ตรวจสอบจุดกึ่งกลางทั้งสาม S, T, U ของส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอดที่อยู่บนวงกลมนี้

ขั้นตอนข้างต้นที่จำเป็นซึ่งวงกลมของรูปสามเหลี่ยมพีดัล ΔDEF เป็นวงกลมที่บรรจุจุดทั้งเก้า D, E, F, P, Q, R, S, T และ U.

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ΔABC รูปสามเหลี่ยมในระบบพิกัดคาร์ทีซียนซึ่ง $A, B,$ และ C มีพิกัด $(a,0)$, $(0,b)$ และ $(c,0)$ ตามลำดับ (การจัดการรูปสามเหลี่ยมนี้เป็นประโยชน์ เพราะการคำนวณจะเป็นไปอย่างตรงไปตรงมาสำหรับเหตุผล ดังนี้: แต่ละจุดยอดมี 0 เป็นพิกัดหนึ่ง แกนตั้งเป็นพิกัดหนึ่งของเส้นดิ่ง) เช่นเดียวกับหัวข้อต่อไปนี้ การคำนวณสิ่งแรกของผู้วิจัยจะเกี่ยวกับการหาสมการสำหรับเส้นดิ่งของรูปสามเหลี่ยมแต่ละเส้น ตลอดเส้นดิ่ง A $\overline{AE}$ บรรจุจุด $(a,0)$ และเป็นเส้นตั้งฉากถึง $\overline{BC}$ ดังนั้นโดยรูปแบบความชันจุด $\overline{AE}$ ถูกบรรยายโดยสมการเส้นตรง

$$y = \frac{c}{b}(x - a) \qquad (1)$$



รูปที่ 3.2.9 ΔABC รูปสามเหลี่ยมในระบบพิกัดคาร์ทีซียนซึ่ง A, B, และ C

ข้อสังเกต ความชันของ $\overline{AE}$ เป็น $\frac{c}{b}$ ซึ่งเกิดจากข้อเท็จจริงความชันของ $\overline{BC}$ ซึ่งเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AE}$ เป็น $m = \dfrac{0-b}{c-0} = -\dfrac{b}{c}$ คลอดเส้นดิ่ง C, $\overline{CD}$ มีจุด $(c,0)$ และเป็นเส้นตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ความชันของ $\overline{AB}$ กำหนดให้ $m = \dfrac{b-0}{0-a}$ ความชันของ $\overline{CD}$ เป็น $\dfrac{a}{b}$ ดังนั้น โดยรูปแบบความชัดจุด $\overline{CD}$ ถูกบรรยายโดยสมการของเส้นตรง

$$y = \frac{a}{b}(x-c). \qquad (2)$$

เส้นดิ่งตลอดจุด B, $\overline{BF}$ เป็นแกนตั้ง เพราะฉะนั้น $\overline{BF}$ อธิบายโดยสมการ $x = 0$.

ขั้นตอนต่อไปผู้วิจัยหาพิกัดของฐานของเส้นดิ่ง ฐาน D เป็นการตัดกันของ $\overline{CD}$ กับ $\overline{AB}$ ขณะที่ $\overline{AB}$ ถูกอธิบายโดยสมการ

$$y = \frac{-b}{a}(x-a). \qquad (3)$$

พิกัดแรกของ D ได้โดยการแก้พร้อมกันทั้งสมการ (2) และ (3) ดังนี้:

$$\frac{a}{b}(x-c) = \frac{-b}{a}(x-a)$$

$$a^2x - a^2c = -b^2x + ab^2$$

$$x(a^2+b^2)=a(b^2+ac)$$

ดังนั้น

$$x=\frac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2}.$$

การแก้สำหรับ y ผู้วิจัยแทนค่าของ x ในสมการ (2) ได้ว่า

$$y=\frac{a}{b}\left(\frac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2}-c\right)$$

$$y=\frac{a^2b(b^2+ac)-acb(a^2+b^2)}{b^2(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{a^2b^3+a^3bc-a^3bc-ab^3c}{b^2(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{b^2(a^2b-abc)}{b^2(a^2+b^2)} \qquad \text{หรือ} \qquad y=\frac{ab(a-c)}{a^2+b^2}.$$

เพราะฉะนั้นพิกัดของ D เป็น

$$D\left(\frac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2},\frac{ab(a-c)}{a^2+b^2}\right).$$

ฐาน E เป็นการตัดกันของ $\overline{AE}$ กับ $\overline{BC}$ ที่ $\overline{BC}$ ถูกอธิบาย โดยสมการ

$$y=\frac{-b}{c}(x-c). \qquad (4)$$

การใช้กระบวนการที่เหมือนกับข้างต้น ผู้วิจัยทำสมการเท่ากันในสมการ (1) และ (4) ในการหาพิกัด x ของ E:

$$\frac{c}{b}(x-a)=\frac{-b}{c}(x-c)$$

$$c^2x+b^2x=b^2c+ac^2$$

$$x(c^2+b^2)=c(ac+b^2)$$

$$x=\frac{c(ac+b^2)}{c^2+b^2}.$$

แล้วผู้วิจัยแทนค่า x ในสมการ (1) ได้พิกัด y ผู้วิจัย ได้

$$y = \frac{c}{b}\left(\frac{c(ac+b^2)}{b^2+c^2} - a\right)$$

$$y = \frac{c^2(ac+b^2) - ac(b^2+c^2)}{b(b^2+c^2)}$$

$$y = \frac{b^2c(c-a)}{b(b^2+c^2)} \text{ หรือ } y = \frac{bc(c-a)}{(b^2+c^2)}.$$

เพราะฉะนั้น พิกัดของ E เป็น

$$E\left(\frac{c(ac+b^2)}{c^2+b^2}, \frac{bc(c-a)}{b^2+c^2}\right).$$

ฐาน F เป็นการตัดร่วมของ $\overline{BF}$ กับ $\overline{AC}$ และมีพิกัด $F(0,0)$

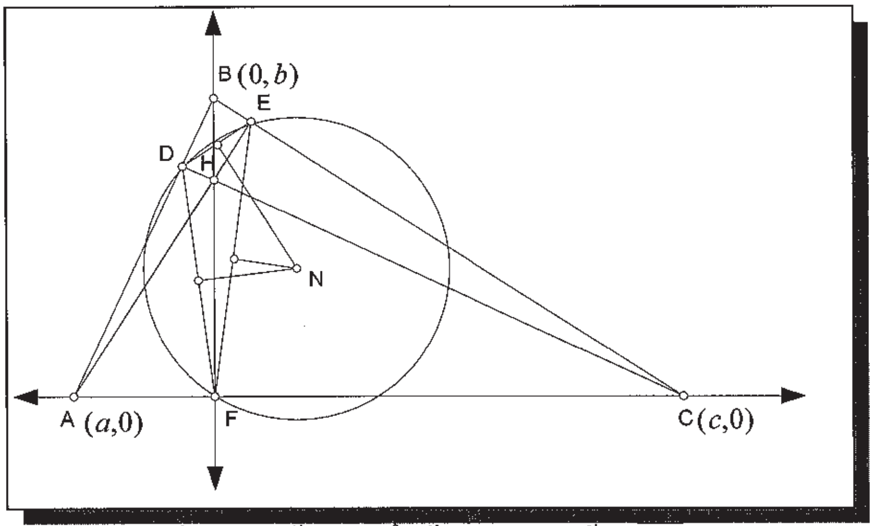
ขณะที่ จุดศูนย์กลาง H ของ ΔABC เป็นการตัดแกน y ของ $\overline{CD}$ หรือ $\overline{AE}$ แทนค่า $x = 0$ ในสมการ (1) พบว่า

$$y = \frac{-ac}{b}.$$

เพราะฉะนั้น H มีพิกัด

$$H\left(0, \frac{-ac}{b}\right).$$

ในขั้นตอนต่อไปเป็นการหาจุดศูนย์กลาง N สำหรับรูปสามเหลี่ยมพีดัล DEF จุดศูนย์กลางนี้เป็นการตัดกันร่วมของเส้นแบ่งครึ่งเส้นตั้งฉากของ DEF.



รูปที่ 3.2.10 เส้นแบ่งครึ่งเส้นตั้งฉากของด้าน DF

สมการแรกที่ผู้วิจัยได้รับสำหรับเส้นแบ่งครึ่งเส้นตั้งฉากของด้าน $\overline{DF}$

การใช้จุด

$$D\left(\frac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2},\frac{ab(a-c)}{a^2+b^2}\right) \text{ และ } F(0,0)$$

จุดกึ่งกลาง M_1 ของ $\overline{DF}$ มีพิกัด

$$M_1\left(\frac{a(b^2+ac)}{2(a^2+b^2)},\frac{ab(a-c)}{2(a^2+b^2)}\right).$$

ความชันของ $\overline{DF}$ เป็น

$$m_1=\frac{\dfrac{ab(a-c)}{a^2+b^2}}{\dfrac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2}}=\frac{b(a-c)}{(b^2+ac)}.$$

การใช้พิกัดของ M_1 และความชัน $\dfrac{-1}{m_1}$ สมการของเส้นแบ่งครึ่งเส้นตั้งฉากของ $\overline{DF}$ กำหนดโดย

$$y-\frac{ab(a-c)}{2(a^2+b^2)}=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}\left(x-\frac{a(b^2+ac)}{2(a^2+b^2)}\right).$$

ผู้วิจัย จัดสมการในรูป

$$y=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{a(b^2+ac)^2}{2b(a-c)(a^2+b^2)}+\frac{ab(a-c)}{2(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{a(b^2+ac)^2+ab^2(a-c)^2}{2b(a-c)(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{ab^4+2a^2b^2c+a^3c^2+a^3b^2-2a^2b^2c+ab^2c^2}{2b(a-c)(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{a^3(b^2+c^2)+ab^2(b^2+c^2)}{2b(a-c)(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{a(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{2b(a-c)(a^2+b^2)}$$

$$y=\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{a(b^2+c^2)}{2b(a-c)}. \qquad (5)$$

ขณะที่ สำหรับด้าน $\overline{EF}$ ความชัน m_2 เป็นการใช้จุด

$$E\left(\frac{c(ac+b^2)}{c^2+b^2},\frac{bc(c-a)}{b^2+c^2}\right) \text{ และ } F(0,0)$$

เป็น

$$m_2=\frac{\dfrac{bc(c-a)}{b^2+c^2}}{\dfrac{c(b^2+ac)}{b^2+c^2}}=\frac{b(c-a)}{(b^2+ac)}.$$

จุดกึ่งกลาง M_2 ของ $\overline{EF}$ เป็น

$$M_2\left(\frac{c(b^2+ac)}{2(b^2+c^2)},\frac{bc(c-a)}{2(b^2+c^2)}\right).$$

การใช้ $\dfrac{-1}{m_2}$ และพิกัดของ M_2 สมการของเส้นตั้งฉากแบ่งครึ่งของ $\overline{EF}$ กำหนดเป็น

$$y-\frac{bc(c-a)}{2(b^2+c^2)}=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}\left(x-\frac{c(b^2+ac)}{2(b^2+c^2)}\right)$$

$$y-\frac{bc(c-a)}{2(b^2+c^2)}=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}x+\frac{c(b^4+2ab^2c+a^2c^2)}{2b(c-a)(b^2+c^2)}$$

$$y=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}x+\frac{c(b^4+2ab^2c+a^2c^2)+bc(c-a)(b)(c-a)}{2b(c-a)(b^2+c^2)}$$

$$y=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}x+\frac{b^4c+2ab^2c^2+a^2c^3+b^2c^3-2ab^2c^2+a^2b^2c}{2b(c-a)(b^2+c^2)}$$

$$y=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}x+\frac{c(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{2b(c-a)(b^2+c^2)}$$

$$y=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}x+\frac{c(a^2+b^2)}{2b(c-a)}. \qquad (6)$$

ผู้วิจัย หาพิกัด x ของ N โดยใช้สมการ (5) และ (6):

$$\frac{-(b^2+ac)}{b(a-c)}x+\frac{a(b^2+c^2)}{2b(a-c)}=\frac{b^2+ac}{-b(c-a)}x+\frac{c(a^2+b^2)}{2b(c-a)}$$

$$x=\frac{\dfrac{c(a^2+b^2)(a-c)-a(b^2+c^2)(c-a)}{2b(c-a)(a-c)}}{2\left(\dfrac{b^2+ac}{b(c-a)}\right)}$$

$$x=\frac{c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)}{4(b^2+ac)}$$

$$x=\frac{(b^2+ac)(a+c)}{4(b^2+ac)} \text{ หรือ } x=\frac{a+c}{4}.$$

ผู้วิจัยหา พิกัด y ของ N โดยแทน x ในสมการ (6) จะได้

$$y=-\frac{(b^2+ac)}{b(c-a)}\left(\frac{a+c}{4}\right)+\frac{c(a^2+b^2)}{2b(c-a)}$$

$$y=\frac{b^2c+ab^2+a^2c+ac^2-2a^2c-2b^2c}{-4b(c-a)}$$

$$y=\frac{(b^2-ac)(a-c)}{4b(a-c)} \text{ หรือ } y=\frac{(b^2-ac)}{4b}.$$

เพราะฉะนั้น N มีพิกัด

$$N\left(\frac{a+c}{4},\frac{(b^2-ac)}{4b}\right).$$

รัศมีของวงกลมเป็นระยะห่างจาก N ถึงจุดที่ตั้งฉาก D, E, F ของรูปสามเหลี่ยมพีดัล ΔDEF ผู้วิจัย พบว่า ฐาน $F\,(0.0)$ เพราะพิกัดง่ายที่ได้มา

สูตรระยะทาง

$$NF=\sqrt{\left(\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{(b^2-ac)}{4b}\right)^2}$$

$$NF=\sqrt{\frac{b^2(a^2+2ac+c^2)+b^4-2ab^2c+a^2c^2}{16b^2}}$$

$$NF=\sqrt{\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}} \text{ หรือ } \frac{\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}}{4b}$$

ดังนั้น สมการวงกลม กำหนดให้

$$\left(x-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(y-\frac{(b^2-ac)}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

กำหนดให้สมการวงกลม ตรวจสอบได้ที่ฐานทั้งสามบนวงกลม สำหรับตัวอย่าง พิกัดของ $F(0,0)$ สอดคล้องกับสมการวงกลม ดังนี้

$$\frac{(a+c)^2}{16}+\frac{(b^2-ac)^2}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{b^2a^2+2ab^2c+b^2c^2+b^4-2ab^2c+a^2c^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

นอกจากนี้ $D\left(\frac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2},\frac{ab(a-c)}{a^2+b^2}\right)$ สอดคล้องกับสมการ ผู้วิจัยพบว่า

$$\left(\frac{a(b^2+ac)}{a^2+b^2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{ab(a-c)}{a^2+b^2}-\frac{(b^2-ac)}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{4a(b^2+ac)-(a+c)(a^2+b^2)}{4(a^2+b^2)}\right)^2+\left(\frac{4ab^2(a-c)-(b^2-ac)(a^2+b^2)}{4b(a^2+b^2)}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{3ab^2+3a^2c-b^2c-a^3)}{4(a^2+b^2)}\right)^2+\left(\frac{3a^2b^2-3ab^2c-b^4+a^3c)}{4b(a^2+b^2)}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{b^2(9a^2b^4-6a^5c-6ab^4c-6a^2b^2c^2+20a^3b^2c+b^4c^2+a^6-a^4b^2+9a^4c^2)}{16b^2(a^2+b^2)^2}+$$

$$\frac{6a^5b^2c-6a^4b^2c^2-20a^3b^4c+a^6c^2+b^8+6ab^6c-6a^2b^6+9a^2b^4c^2+9a^4b4}{16b^2(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{3a^2b^6+b^6c^2+a^6b^2+3a^4b^2c^2+a^6c^2+b^8+3a^2b^4c^2+3a^4b^4}{16b^2(a^2+b^2)^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(a^2+b^2)^3(b^2+c^2)}{16b^2(a^2+b^2)^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

ประเภทเดียวกัน $E\left(\frac{c(ac+b^2)}{c^2+b^2},\frac{bc(c-a)}{b^2+c^2}\right)$ สอดคล้องสมการวงกลม

ต่อไปแสดง

$$\left(\frac{c(b^2+ac)}{b^2+c^2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{bc(c-a)}{b^2+c^2}-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

$$\left(\frac{4c(b^2+ac)-(a+c)(b^2+c^2)}{4(b^2+c^2)}\right)^2+\left(\frac{4b(bc)(c-a)-(b^2-ac)(b^2+c^2)}{4b(b^2+c^2)}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

$$\left(\frac{3b^2c+3ac^2-ab^2-c^3)}{4(b^2+c^2)}\right)^2+\left(\frac{3b^2c^2-3ab^2c-b^4+ac^3)}{4b(b^2+c^2)}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

$$\frac{b^2(-6b^2c^4-3ac^5+c^6+a^2b^4 20ab^2c^3-6a^2b^2c^2-6ab^4c+9a^2c^4+9b^4c^2)}{16b^2(b^2+c^2)^2}+$$

$$\frac{b^2c^6+a^2b^6+3b^6c^2+3a^2b^2c^4+3ab^2c^3+3a^2b^4c^2+b^8+a^2c^6+3b^4c^4}{16b^2(b^2+c^2)^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)^3}{16b^2(b^2+c^2)^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

ขณะที่ พิกัดของจุดกึ่งกลางของด้านถูกกำหนดให้เป็น $P\left(\frac{a+c}{2},0\right)$, $Q\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$, $R=\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right)$ ตามด้วย

การคำนวณพิกัด P, Q, R สอดคล้องกับสมการของวงกลม

สำหรับจุด $P\left(\frac{a+c}{2},0\right)$:

$$\left(\frac{a+c}{2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(0-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{1}{16}(a+c)^2+\frac{(b^2-ac)^2}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{b^2a^2+2ab^2c+b^2c^2+b^4-2ab^2c+a^2c^2}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

สำหรับจุด $Q\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$:

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{a-c}{4}\right)^2+\left(\frac{2b^2-b^2+ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{b^2a^2-2ab^2c+b^2c^2+b^4+2ab^2c+a^2c^2}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

สำหรับจุด $R=\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right)$:

$$\left(\frac{c}{2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{c-a}{4}\right)^2+\left(\frac{2b^2-b^2+ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2a^2-2ab^2c+b^2c^2+b^4+2ab^2c+a^2c^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

จุดกึ่งกลางสามจุดจากจุดศูนย์กลางที่ตั้งฉาก $H\left(0,\frac{-ac}{b}\right)$ กับจุดยอด $A(a,0), B(0,b), C(c,0)$ เป็น ตามลำดับ $S\left(\frac{a}{2},\frac{-ac}{2b}\right)$, $T\left(0,\frac{b^2-ac}{2b}\right)$ และ $U\left(\frac{c}{2},\frac{-ac}{2b}\right)$ พิกัดของ S, T, U เพียงพอเหมือนกับสมการของเส้นรอบวง ได้ผลเฉลย ดังนี้

สำหรับจุด $S\left(\frac{a}{2},\frac{-ac}{2b}\right)$:

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{-ac}{2b}-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{a-c}{4}\right)^2+\left(\frac{-b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2a^2+2ab^2c+b^2c^2+b^4-2ab^2c+a^2c^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

สำหรับจุด $T\left(0,\frac{b^2-ac}{2b}\right)$:

$$\left(0-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{b^2-ac}{2b}-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{-a-c}{4}\right)^2+\left(\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{b^2a^2+2ab^2c+b^2c^2+b^4-2ab^2c+a^2c^2}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{b^2a^2++b^2c^2+b^4+a^2c^2}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

สำหรับจุด $U\left(\frac{c}{2},\frac{-ac}{2b}\right)$:

$$\left(\frac{c}{2}-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(\frac{-ac}{2b}-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\left(\frac{c-a}{4}\right)^2+\left(\frac{2ac-b^2+ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2a^2-2ab^2c+b^2c^2+b^4+2ab^2c+a^2c^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}$$

$$\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}.$$

ดังนั้น จุดเก้าจุด $D, E, F, P, Q, R, S, T, U$ ทั้งหมด บนวงกลมกับสมการ

$$\left(x-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(y-\frac{(b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{(b^2+c^2)(a^2+b^2)}{16b^2}. \qquad \blacksquare$$

บทที่ 4

ทฤษฎีของฟีเยอร์บาค

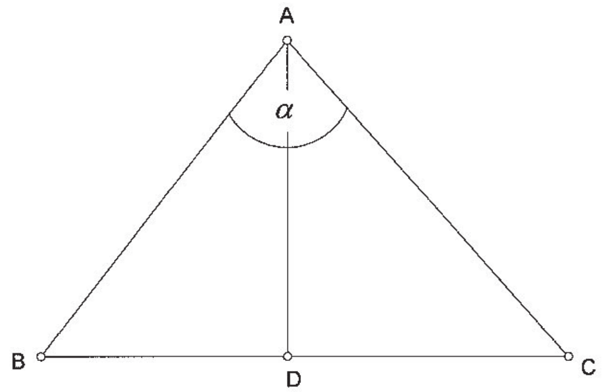
(FEUERBACH' S THEOREM)

หลังจากที่มีการคิดค้นทฤษฎีวงกลมเก้าจุด (Nine-Point Circle) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน โดย คาร์ล ฟีเยอร์บาค (Karl Feuerbach) ได้ค้นพบสิ่งที่นอกเหนือจากทฤษฎีวงกลม เรียกว่าทฤษฎีฟีเยอร์บาค เป็นสิ่งที่คิดค้นได้ต่อจากทฤษฎีวงกลมเก้าจุด เมื่อด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมสัมผัสภายนอกและภายในวงกลม ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึง การใช้ความคิดรวบยอดของการสลับตำแหน่งวงกลมในการพิสูจน์ทฤษฎีฟีเยอร์บาค ก่อนที่ผู้วิจัยจะทำการพิสูจน์ทฤษฎีฟีเยอร์บาค ผู้วิจัยจะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีตามลำดับความสำคัญที่จะนำไปใช้ในการพิสูจน์

4.1 ทฤษฎีฟีเยอร์บาค

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้าใน ΔABC เส้นแบ่งครึ่งมุม A จะพบดานตรงข้าม $\overline{BC}$ ที่จุด D แล้ว

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$



รูปที่ 4.1 ΔABC เส้นแบ่งครึ่งมุม A

พิสูจน์

กำหนดให้ $m\angle BAC = \alpha$

พิจารณา ΔBAD จากกฎของไซน์ พบว่า

$$\frac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{\sin m\angle ADB} \tag{1}$$

ในทำนองเดียวกัน ΔADC จากกฎของไซน์ พบว่า

$$\frac{DC}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{AC}{\sin m\angle ADC} \tag{2}$$

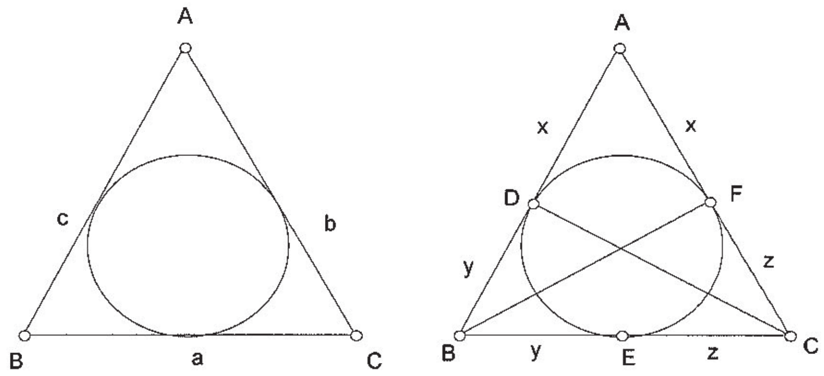
ขณะที่ $$\sin m\angle ADC = \sin m\angle ADB$$

เนื่องจาก $\angle ADC$ และ $\angle ADB$ เป็นมุมฉาก

ดังนั้นจากสมการ (1) และ (2)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

ทฤษฎีบท 4.2 ΔABC ที่ $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ กำหนดให้ครึ่งหนึ่งของความยาวเส้นรอบวง (semi - perimeter) $\dfrac{a+b+c}{2}$ ของ ΔABC เป็น s โดยที่ภายในวงกลมของ ΔABC สัมผัสด้าน $\overline{AB}, \overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ที่ D, E, F ตามลำดับแล้ว $AD = EF = s-a, BE = BD = s-b$ และ $CE - CF = s-c$



รูปที่ 4.2 ΔABC ที่ $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$

พิสูจน์

ให้ $x = AD = AF,\ y = BE = BD$ และ $z = EC = FC$

ดังนั้น

$$x + y = c \tag{1}$$

$$y + z = a \tag{2}$$

$$x + z = b \tag{3}$$

รวมสมการ (1), (2) และ (3) พบว่า

$$2x + 2y + 2z = a + b + c$$

หรือ

$$x + y + z = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

ได้ว่า

$$x = \frac{1}{2}(a + b + c) - (y + z)$$

หรือ

$$x = \frac{1}{2}(a+b+c) - c$$

เนื่องจาก

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

ได้ว่า

$$x = s - a$$

ในทำนองเดียวกันพบว่า

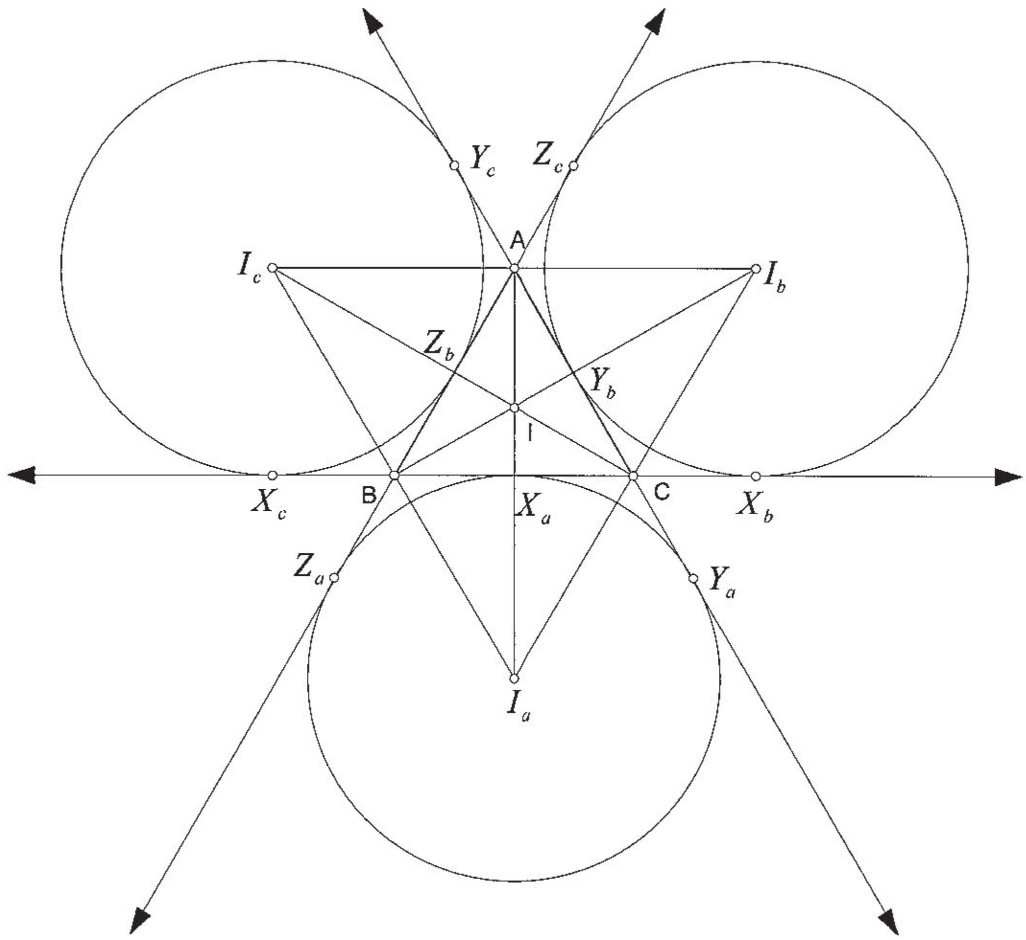
$$y = s - b \quad \text{และ} \quad z = s - c$$

สิ่งที่ได้รับจากทฤษฎีนี้เกี่ยวกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในและภายนอกรูปสามเหลี่ยมดังนี้

1. เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เรียกว่าเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอก (external bisector) และ

2 . เส้นแบ่งครึ่งของมุมภายในของสามเหลี่ยมใดๆ เรียกว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมภายใน (internal bisector)

ทฤษฎีบท 4.3 เส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของทุกๆสองมุมของรูปสามเหลี่ยมที่กระทำร่วมกันกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สาม



รูปที่ 4.3 รูปสามเหลี่ยม $I_aI_bI_c$ มีเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของทุกๆสองมุมของรูปสามเหลี่ยม

พิสูจน์

พิจารณารูปที่ 4.3 แสดงรูปสามเหลี่ยม $I_aI_bI_c$ มีเส้นแบ่งครึ่งของมุมภายนอก A, B, C บนด้านทั้งสองของ ΔABC ทุกจุดบนเส้นแบ่งครึ่ง $\overline{I_cI_a}$ ของ $\angle B$ ที่มีช่วงระยะห่างกันจาก $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ในทำนองเดียวกัน ทุกจุดบน $\overline{I_aI_b}$ ที่มีช่วงระยะห่างกันจาก $\overline{BC}$ และ $\overline{CA}$ ดังนั้นจุด I_a ที่เส้นแบ่งครึ่งภายนอกทั้งสองพบกันเป็นระยะห่างที่เท่ากันจากด้านทั้งสาม เนื่องจาก I_a อยู่ห่างกันด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{CA}$ เท่ากัน ต้องอยู่บนทางเดินของจุดที่มีช่วงระยะห่างเท่ากัน เส้นทั้งหลาย นั่นคือ ต้องอยู่เป็นเส้น $\overline{AI}$ เส้นแบ่งครึ่งภายนอกของ $\angle A$ จุดร่วมของเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมทั้งสองกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในของมุมที่สามเป็นศูนย์กลาง ของภายนอกวงกลมของรูปสามเหลี่ยม อ้าง

ถึงรูปที่ 4.3 วงกลมที่ศูนย์กลางที่ I_a, I_b, I_c เป็นวงกลมสามวงหรือภายนอกวงกลมของ ΔABC ภายนอกวงกลมสัมผัสภายนอกถึงด้าน และขยายออกสองด้าน และขยายออกสองด้านของสามเหลี่ยม ภายนอกวงกลมศูนย์กลางที่ I_a สัมผัส $\overline{BC}$ ที่ X_a และขยายออกด้าน $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ที่ Y_a และ Z_a ตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน ภายนอกวงกลมศูนย์กลางที่ I_b สัมผัส $\overline{AC}$ ที่ Y_b และขยายออก ด้าน $\overline{BC}$ และ $\overline{AB}$ ที่ X_b และ Z_b ตามลำดับ เหมือนกับ ภายนอกวงกลมศูนย์กลางที่ I_c สัมผัส $\overline{AB}$ ที่ Z_c และขยายออกด้าน $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ที่ X_c และ Y_c ตามลำดับ ภายในวงกลมศูนย์กลาง ที่ I และภายนอกวงกลมสามวง แต่สัมผัสด้านทั้งสาม บางครั้งเรียกว่าเส้นสัมผัสวงกลมทั้งสาม (tritangent circles) ของ ΔABC

บทแรก 4.4 อ้างถึงรูปที่ 4.3 สมมติ $AB = c, BC = a, CA = b$ และ ให้ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ ผู้วิจัยพิจารณาเส้นสัมผัสสองเส้นจากจุดๆหนึ่งบนวงกลมวงหนึ่งมีความยาวเท่ากัน สัมผัสกับวงกลมศูนย์กลาง ที่ I_a

$$BX_b = BZ_c$$

และ

$$BX_b + BZ_c = BC + CX_b + Z_cA + AB$$

$$BX_b + BZ_c = BC + CY_b + Y_bA + AB = a + b + c = 2s$$

ดังนั้น เส้นสัมผัสจาก B (หรือทุกๆจุดยอดอื่น) ถึงวงกลมภายนอกที่อยู่ตรงข้ามด้านเป็นความยาวแล้ว

$$BX_b = BZ_c = s$$

ในทำนองเดียวกัน พบว่า

$$AY_a + AZ_a = BZ_c = BX_b = CX_c = CY_c = s$$

เหมือนกัน

$$CY_b = CX_b = BX_b - BC = s - a$$

ขณะที่

$$BZ_c = BX_c = CX_c - BC = s - a$$

ดังนั้น

$$BX_c = BZ_c = CX_b - CY_b = s - a$$

ในทำนองเดียวกันพบว่า

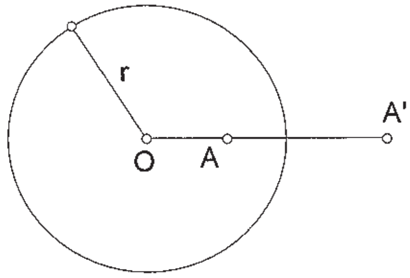
$$CY_a = CX_a = AY_c = AZ_c = s - b$$

และ

$$AZ_b = AY_b = BZ_a = BX_a = s - c$$

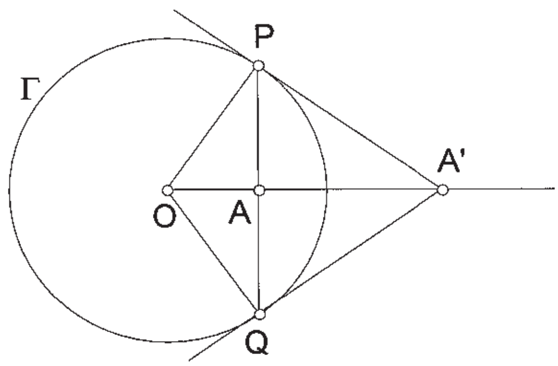
นิยาม 4.5 ให้ Γ เป็นวงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่งในระนาบ ที่มีจุดศูนย์กลาง O และรัศมี r สำหรับทุกๆจุด $A \neq O$ รังสี $\overline{OA}$ และให้ A' เป็นจุดๆหนึ่งบนรังสี $\overline{OA}$ ซึ่ง $(OA)(OA') = r^2$ ลำกล่าวว่า A' ถูกกำหนด จาก A โดยวงกลมสลับตำแหน่งกันเทียบกับวงกลม Γ

สรุป กล่าวว่า A' เป็นสลับตำแหน่งกับ A (เทียบกับ Γ) เนื่องจากความยาว OA, OA' เป็นบวกแล้ว A และ A' ต้องอยู่บนด้านเดียวกันของ O ดังกล่าวได้ว่าวงกลมสลับตำแหน่งกันใน Γ เหมือนนิยามการแปลงสำหรับจุดทั้งหมด $A \neq O$ ซึ่งแปลงระนาบ $-\{O\}$ โดยการส่งแต่ละจุดไปที่แต่ละตำแหน่งที่สลับที่กัน สำหรับทุกๆจุดบน Γ เป็นการส่งไปในตัวเอง จุดบน Γ ถูกส่งไปจุดภายนอก Γ และ ในทางตรงกันข้าม



รูปที่ 4.4 วงกลมที่กำหนดให้วงหนึ่งในระนาบ ที่มีจุดศูนย์กลาง O และรัศมี r

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ A เป็นจุดๆหนึ่งภายในวงกลม Γ สร้างรังสี $\overline{OA}$ ให้ $\overline{PQ}$ เป็นคอร์ดของวงกลมตั้งฉากกับ $\overline{OA}$ ที่ A แล้วสัมผัส Γ ที่ P และ Q พบรังสี $\overline{OA}$ ที่จุด A' ซึ่งเป็นการสลับที่กันของ A เทียบกับ Γ



รูปที่ 4.5 A เป็นจุดๆหนึ่งภายในวงกลม Γ สร้างรังสี $\overline{OA}$

พิสูจน์

ประการแรก เส้นสัมผัสทั้งสองพบกับ $\overline{OA}$ ที่จุด A' เดียวกันและสมมาตรกัน ขณะที่รูปสามเหลี่ยม ΔOAP และ $\Delta OPA'$ ทำมุมที่จุด O ร่วมกัน ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสองนี้คล้ายกัน ดังนั้น ด้านที่สมนัยกันเป็นสัดส่วนกัน จะได้ว่า

$$\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OA'}$$

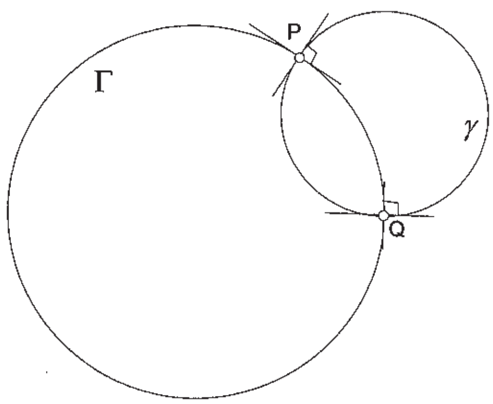
ในทำนองเดียวกันพบว่า

$$(OA)(OA^{/}) = (OP)^2 = r^2$$

ดังนั้น A และได้ว่า $A^{/}$ เป็นวงกลมผกผันใน Γ

บทแทรก 4.7 จากทฤษฎีพบว่าวิธีการหนึ่งของการสร้างวงกลมสลับที่กันได้โดยไม้บรรทัดและวงเวียน ถ้า A เป็นจุดหนึ่งที่กำหนดให้ภายใน Γ ลาก $\overline{OA}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OA}$ ที่ A พบ Γ ที่ P ลากรัศมี $\overline{OP}$ ลากเส้นตั้งฉากกับ $\overline{OP}$ ที่ P ซึ่งจะเป็นเส้นสัมผัสและจะพบ $\overline{OA}$ ที่ $A^{/}$ บทกลับ ถ้าจุด $A^{/}$ เป็นจุดที่กำหนดให้ภายนอกวงกลม ลากส้นสัมผัสจาก $A^{/}$ พบ Γ ร่วมกันกับเส้นสัมผัสวงกลม P,Q และให้เส้น $\overline{PQ}$ พบ $\overline{OA^{/}}$ ที่ A

นิยาม 4.8 วงกลมสองวงตั้งฉากกัน ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมเป็นเส้นตั้งฉากที่จุดสัมผัสร่วมกัน

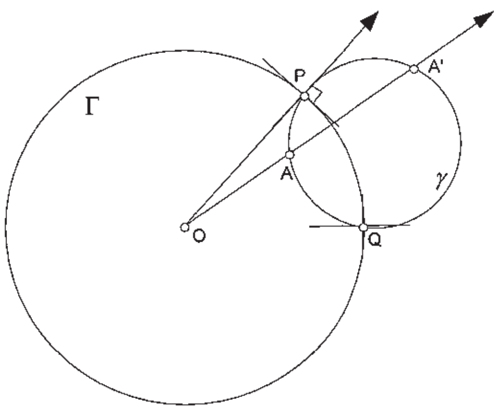


รูปที่ 4.6 วงกลมสองวงตั้งฉากกัน

นิยาม 4.9 วงกลมสองวงพบกัน (หรือเมื่อวงกลมวงหนึ่งพบเส้นหนึ่งเส้น) โดยที่มุมระหว่างวงกลมทั้งสองสัมผัสกันที่จุด (เทียบเท่ากับมุมระหว่างเส้นสัมผัสและเส้นอื่นๆ)

ข้อสังเกต เมื่อวงกลมสองวงพบกันที่จุดสองจุด มุมระหว่างวงกลมทั้งสองมีขนาดเท่ากันที่จุดสองจุดเพราะว่าวงกลมสองวงเหมือนกันเส้นร่วมกันจุดศูนย์กลางสองจุด

ทฤษฎีบท 4.10 ถ้าวงกลม γ ตั้งฉากกับวงกลม Γ แล้ววงกลม γ เปลี่ยนตัวเองโดยวงกลมสลับตำแหน่งกันในวงกลม Γ

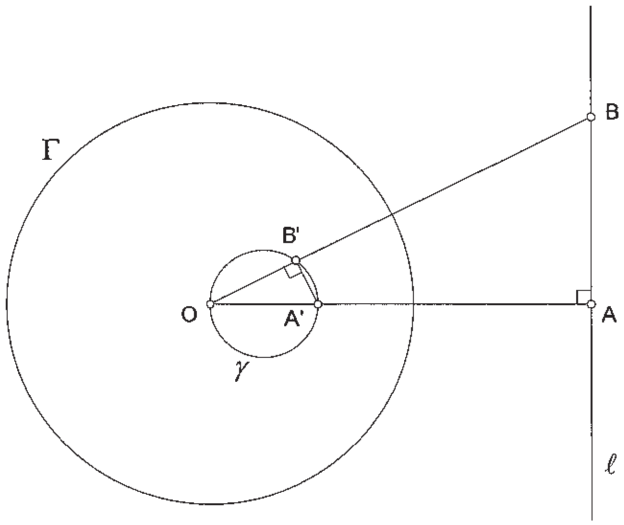


รูปที่ 4.7 วงกลม γ ตั้งฉากกับวงกลม Γ

พิสูจน์

สิ่งแรกกำหนดให้ γ ตั้งฉากกับ Γ และให้ γ พบ Γ ที่ P และ Q ดังนั้นรัศมี $\overline{OP}$ สัมผัสกับ γ ให้ A เป็นจุดอื่นของ γ และให้ $\overline{OA}$ พบ γ อีกที่ A' การประยุกต์ทฤษฎีบท 2.2.13 ใน γ พบว่า $(OP)^2 = (OA)(OA')$ เนื่องจากแสดงว่า A และ A' ที่ตรงกันข้าม การรวมกันสำหรับทุก A บน γ ดังนั้น γ ถูกส่งในตัวเอง

ทฤษฎีบท 4.11 วงกลม Γ มีจุดศูนย์กลาง O และรัศมี r ให้ l เป็นเส้นที่ไม่ผ่าน O การสลับที่กันของ l ในวงกลม Γ จะเป็นวงกลมหนึ่งผ่านตลอด O และบทกลับ



รูปที่ 4.8 วงกลม Γ มีจุดศูนย์กลาง O และรัศมี r

พิสูจน์

ให้ l เป็นเส้นที่ไม่ผ่าน O ให้ $\overline{OA}$ ตั้งฉากจาก O ไป l ให้ A' เป็นผกผันของ A และให้ γ เป็นวงกลม เส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{OA'}$ ผู้วิจัยพิจารณาการทางกลับกันของจุดบน l เส้นทั้งหมดบน γ และในทางกลับกัน ดังนั้น ให้ B เป็นจุดใดๆบน l ลาก $\overline{OB}$ และพบกับ γ ที่ B' แล้ว $OB'A'$ เป็นรูปสามเหลี่ยมทางขวาโดยบทแทรก 2.3.3 $\Delta OAB \sim \Delta OB'A'$ โดย AA คล้ายกัน (สามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีมุม O ร่วมกัน) ดังนั้นด้านเป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{OB'}{OB'} = \frac{OA}{OB}$$

หรือ

$$(OB)(OB') = (OA)(OA')$$

ขณะที่ A' เป็นที่สลับกันของ A ดังนั้น

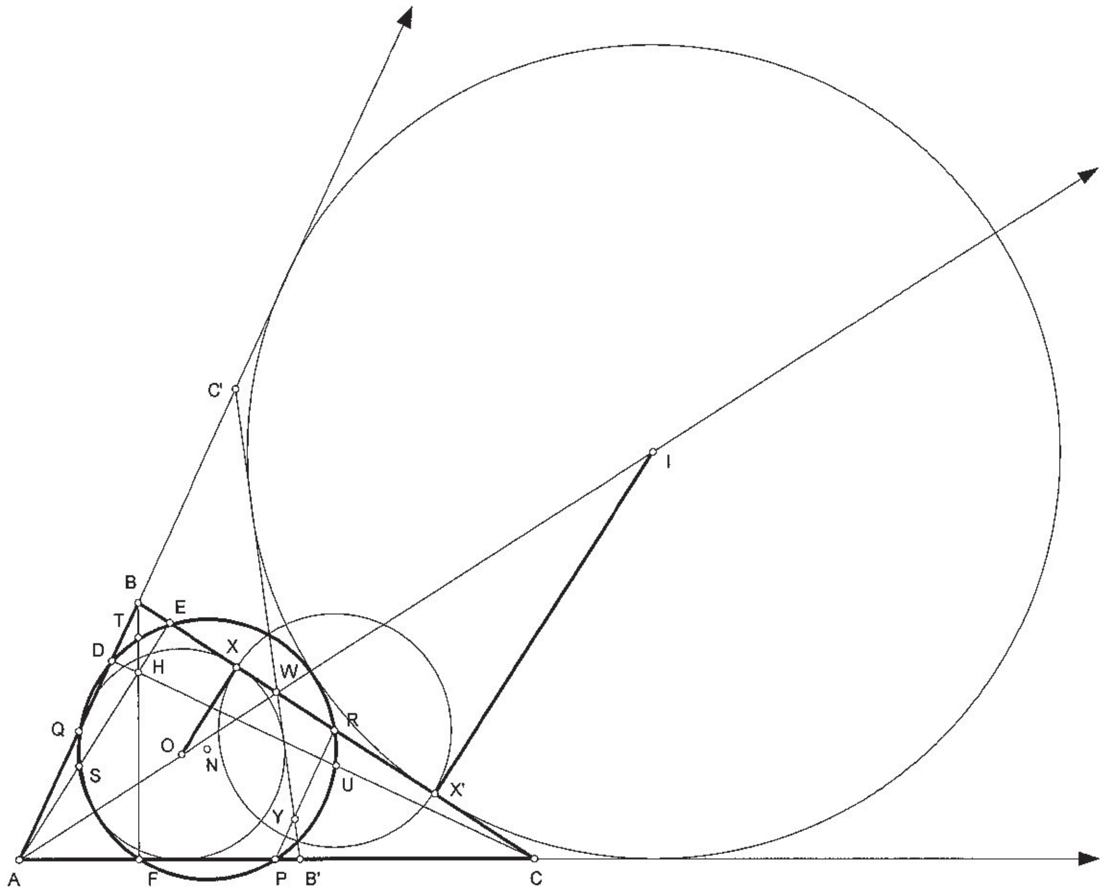
$$(OA)(OA') = r^2$$

ดังนั้น

$$(OB)(OB') = r^2$$

ดังนั้น B และ B' เป็นบทกลับของกันและกัน แสดงว่าวงกลมเปลี่ยนจุดของ l ไปเป็นจุดของวงกลม γ

ทฤษฎีฟีเยอร์บาค (Feuerbach) วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมสัมผัสภายในวงกลมและภายนอกทั้งหมดของรูป



รูปที่ 4. 9 วงกลมเก้าจุดของรูปสามเหลี่ยมสัมผัสภายในวงกลมและภายนอก

พิสูจน์

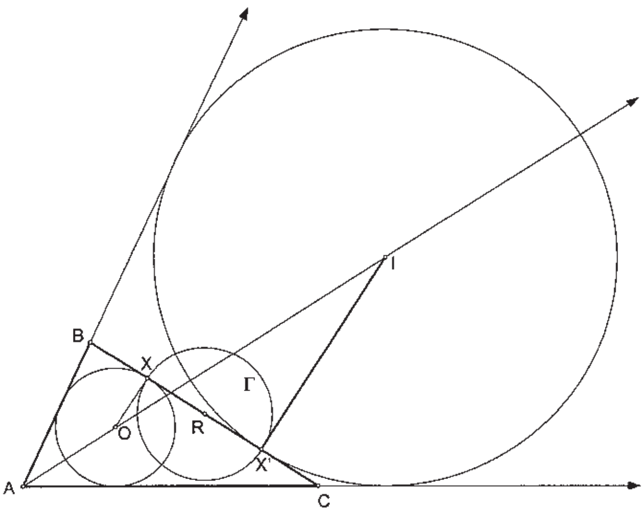
พิจารณาวงกลมเก้าจุดในบทก่อนนี้จาก ΔABC กับจุดทั้งเก้า D, E, F, P, Q, R, S, T และ U กำหนด ΔABC พิจารณาภายใน วงกลมที่จุดศูนย์กลางที่ O และภายนอกวงกลมวงหนึ่งที่ I ผู้วิจัยพิจารณาวงกลมภายนอกกำหนดโดยช่วงมุมเส้นแบ่งครึ่งที่ A และภายนอกที่เส้นแบ่งครึ่งที่ B และ C จุดศูนย์กลางของวงกลมภายนอกตัดร่วมกันของเส้นแบ่งครึ่ง ให้วงกลมภายในและภายนอกสัมผัส $\overline{BC}$ ที่จุด X และ X' ตามลำดับ กำหนดจุด B' บน $\overline{AC}$ ซึ่ง $\overline{AB'} \cong \overline{AB}$ เหมือนกันที่ จุด C' บน $\overline{AB}$ ซึ่ง $\overline{AC'} \cong \overline{AC}$ ส่วน $\overline{B'C'}$ สัมผัสวงกลมภายในแลภายนอก ในประเภทเดียวกัน $\overline{BC}$ แทน $BC = a, CA = b, AB = c$ ที่ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ โดยทฤษฎีบท 4.2

$BX = s - b$ และ โดยบทแทรก 4.4 พิจารณา $CX' = s - b$ ให้ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ แล้ว $RX = \dfrac{1}{2}a - BX = \dfrac{1}{2}a - (\dfrac{1}{2}(a+b+c) - b) = \dfrac{b-c}{2}$

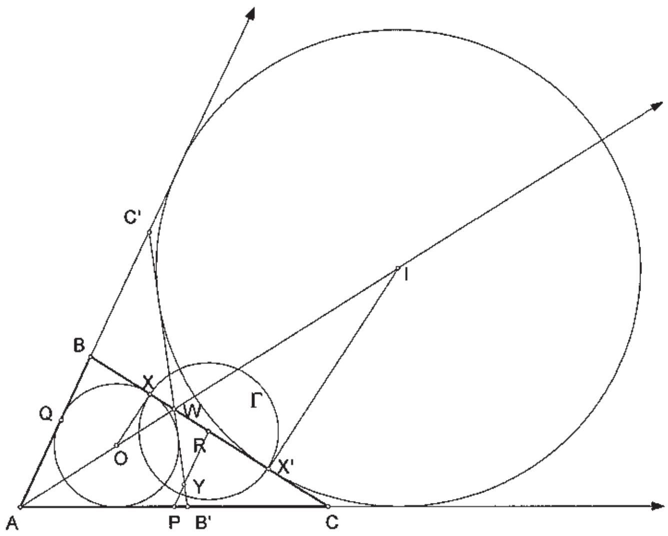
ในทำนองเดียวกัน

$$RX' = \frac{1}{2}a - CX' = \frac{b-c}{2}$$

การสร้างวงกลม Γ วงหนึ่ง จุดศูนย์กลางที่ R รัศมี $\overline{RX}$ วงกลมนี้บรรจุ X' วงกลมภายในเป็นตั้งฉากกับ Γ ดังนั้นเป็นวงกลมภายนอก โดยที่รัศมีทั้งสองคือ $\overline{IX'}$ และ $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{XX'}$ โดยนิยาม 4.9 ดังนั้นทฤษฎีบท 4.10 ของวงกลมถูกกำหนดโดยการสลับที่กันในวงกลม Γ



รูปที่ 4.10 แสดง ΔABC ผ่านตลอดจุดศูนย์กลางของวงกลม Γ



รูปที่ 4.11 แสดง $(RX)^2 = (RP)(RY)$

วงกลมเก้าจุด ΔABC ผ่านตลอดจุดศูนย์กลางของวงกลม Γ ซึ่งบรรจุ R ดังนั้นจึงเปลี่ยนตำแหน่งเป็นเส้นหนึ่งไม่ผ่าน R ผู้วิจัยพบว่าเส้น $B'C'$ ให้ $Y = \overline{B'C'} \cap \overline{RP}$ จุด Y เปลี่ยนเป็นการสลับที่กันของ P (จุดกึ่งกลางของ) $\overline{AC}$ เทียบกับ Γ พบว่า R, Y และ P อยู่บนเส้นเดียวกัน ผู้วิจัยตรวจสอบ $(RX)^2 = (RP)(RY)$

ใน ΔABC P และ R เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ

ดังนั้น จากทฤษฎีบทที่ 2.4.2 $\overline{RP} \parallel \overline{AB}$ และ $RP = \frac{1}{2}c$

ขณะที่ $W = \overline{B'C'} \cap \overline{BC}$ รูปสามเหลี่ยม ΔWRY และ ΔWRY คล้ายกับ $\Delta WBC'$ โดย AA คล้ายกัน

ข้อสังเกต $\angle YWR \cong \angle BWC'$ เนื่องจากมีมุมที่ตั้งฉาก นอกจากนี้ $\overline{BR}$ เป็นเส้นตัดขวางที่ขนานกับส่วนนของเส้นตรง $\overline{RP}$ และ $\overline{AC}$ (C' อยู่บนด้านที่ยืดขนาดออกของ $\overline{AB}$)

ดังนั้น $\Delta WRY \cong \Delta WBC'$

ดังนั้น

$$\frac{RY}{BC'} = \frac{WR}{WB}$$

กำหนดให้

$$RY = \frac{(BC')(WR)}{WB}$$

ข้อสังเกต

$$BC' = AC - AB = b - c$$

และ

$$CW + WB = a \qquad (1)$$

โดยทฤษฎีบท 4 พบว่า

$$\frac{CW}{WB} = \frac{b}{c}$$

หรือเทียบเท่ากับ

$$CW = \frac{(WB)(b)}{c} \qquad (2)$$

รวมสมการ (1) และ (2) ได้ว่า

$$\frac{(WB)(b)}{c} + WB = a$$

หรือ

$$WB = \frac{ac}{b+c}$$

นอกจากนี้

$$WR = \frac{a}{2} - WB$$

$$WR = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c}$$

$$WR = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

ดังนั้น

$$RY = \frac{(b-c)(\frac{a(b-c)}{2(b+c)})}{\frac{ac}{b+c}}$$

$$RY = \frac{\frac{a(b-c)^2}{2(b+c)}}{\frac{ac}{b+c}}$$

$$RY = \frac{(b-c)^2}{2c}$$

ดังนั้น

$$(RP)(RY) = \frac{c}{2}\left(\frac{(b-c)^2}{2c}\right)$$

$$(RP)(RY) = \frac{(b-c)^2}{4}$$

หรือ

$$\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 = (RX)^2$$

แสดงว่า Y เป็นการสลับที่กันของ P เทียบกับ Γ ขณะนิยาม $Z = B'C' \cap RQ$ ในทำนองเดียวกัน แสดงว่า Z เป็นการสลับที่กันของ Q เทียบกับ Γ ดังนั้น การสลับที่กันของวงกลมเก้าจุดเทียบกับวงกลม Γ เป็นเส้น $YZ = B'C'$ เพราะเส้นนี้เป็นเส้นสัมผัสของวงกลมทั้งสอง คล้ายกันการใช้เหตุผลเพื่อแสดงความจริงสำหรับวงกลมภายนอกอันใดอันหนึ่งในสองวง อย่างไรก็ตามแต่ละวงที่แตกต่างกันของการสลับที่กัน

บทที่ 5

สรุป ผลการวิจัย

ในบทนี้เป็นการสรุปผลการวิจัย การพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และทฤษฎี Feuerbach

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในบทที่ 3 ได้แสดงให้เห็นว่า จุดทั้งเก้าจุดคือ จุดสามจุดที่เกิดจากจุดฐานของรูปสามเหลี่ยม กับจุด 3 จุดที่เกิดจากจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และจุดสามจุดที่เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากทั้งสามร่วมกัน จุดศูนย์กลาง จุดออร์โทเซนเตอร์ ทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบวงกลม ซึ่งเป็นการพิสูจน์ ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด

ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยตามขั้นตอนในการพิสูจน์ ดังนี้

1 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ΔABC บนระบบพิกัด

2 หาสมการสำหรับเส้นดิ่งของรูปสามเหลี่ยม

3 หาพิกัดของฐาน D,E,F ของเส้นดิ่งและพิกัดของจุดศูนย์กลาง H

4 หาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมของรูปสามเหลี่ยมพีดัล ΔDEF

5 หาสมการสำหรับวงกลมของรูปสามเหลี่ยมพีดัล

6 ตรวจสอบฐานทั้งสาม D,E,F อยู่บนวงกลม

7 ตรวจสอบจุดกึ่งกลางทั้งสาม P,Q,R ของด้านที่อยู่บนวงกลม

8 ตรวจสอบจุดกึ่งกลางทั้งสาม S,T,U ของส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอดที่อยู่บนวงกลมนี้

และบทที่ 4 เป็นการพิสูจน์ทฤษฎี Feuerbach โดยวิธีการสลับตำแหน่งวงกลม

5.2 การอภิปรายผล

งานวิจัยนี้แสดงผลการวิจัยในบทที่ 3 โดยการแสดงให้เห็นว่า จุดทั้งเก้า คือจุด D,E,F,P,Q,R,S,T และ U สอดคล้องกับสมการวงกลม $\left(x-\frac{a+c}{4}\right)^2+\left(y-\frac{b^2-ac}{4b}\right)^2=\frac{\left(b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{16b^2}$ และ ในบทที่ 4 แสดงให้เห็นว่า การสลับตำแหน่งวงกลม เมื่อด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมสัมผัสภายนอกและภายในวงกลม

5.3 ข้อเสนอแนะ

ในการพิสูจน์นี้ผู้วิจัยพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุและทฤษฎี Feuerbach และในการสร้างรูปทั้งหมดในการวิจัยนี้ใช้ ซอฟต์แวร์ทางคณิตศาสตร์ ในการทำความเข้าใจทฤษฎี และใช้ในการวาดรูป ผู้ที่สนใจจะศึกษาจะต้องมีความรู้พื้นฐานในเรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์เกี่ยวกับ ความชันของเส้นตรง สมการเส้นตรง สมการวงกลม เป็นต้น ในการพิสูจน์ทฤษฎีวงกลมเก้าจุดนี้ ต่อไปผู้สนใจอาจดำเนินการวิจัย พิสูจน์ทฤษฎีโดยวิธีอื่นได้อีก ได้แก่การพิสูจน์โดยเรขาคณิต โดยการวาดรูป

ทฤษฎีวงกลมเก้าจุด และทฤษฎี Feuerbach ยังสามารถดำเนินการวิจัยต่อไปโดยนำไปใช้ในการแสดงว่า จุดทั้งเก้าจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงรีได้

บรรณานุกรม

[1] Elder, A.E.(1960) "*Feuerbachs Theorem: A New Proof*", The American Mathematics Monthly: Vol.67, No. 9 (November), 905-906.

[2] Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L. (1967) *Geometry Revisited.* Yale University.

[3] Guinand, A.P.(1985) "*Incenters and excircles: Viewed from the Euler Line*", Mathematics Magazine: Vol.58, No.2 (March), 89 –92.

[4] Goldman, J; Berelle, A. (2001) *Geometry: Contents and Constructions.* California: Prentice Hall, Inc.

[5] Hartshorne, R. (2000) *Geometry:Euclid and Beyond.* New York: Springer Verlag, Inc.

[6] Holzinger, J. (1963) "*The Problem of the Angle Bisectors*", The Mathematics Teacher: Vol. 56, No. 5, 321-322.

[7] Karmelkar S.M. (1946) "*Construction of the In-Feuerbach Point*", The American Mathematical Monthly: Vol. 53, No. 4 (April), 206-207.

[8] Lameon F., Meyer W. (2001) "*Euler Lines Concurrent on the Nine-Point Circle*", The American Mathematical Monthly: Vol. 108, No. 6 (June), 569.

[9] Moise, E.;Downs, F. (1975) *Geometry.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

[10] Reynolds, B. ; Fenton, W. (2006) *College Geometry.* California: Key Curriculum Press, Inc.

[11] Sandham S.F. (1949) "*A Generalization on Feuerbach's Theorem*", The American Mathematics Monthly: Vol.56, No.9 (November), 620-622.

[12] Stark J. (1963) "*Analytic proof of the Feuerbach's Theorem*", Mathematics Magazine: Vol. 36, No. 2 (March), 122-125.

[13] Thebault V. (1949) "*On the Feuerbach's point* ". The American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 8 (October), 546-547.

[14] Weiss, S. (1972) *Geometry: Content and Strategy for Teachers*, California: Bogden and Quigley Inc.

ภาคผนวก

สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

1.4.1 $=$ หมายถึง เท่ากับ

1.4.2 $\neq$ หมายถึง ไม่เท่ากับ หรือ แตกต่าง

1.4.3 $\cong$ หมายถึง สอดคล้อง ความลงรอยกัน

1.4.4 $\sim$ หมายถึง เหมือนกัน คล้ายกัน

1.4.5 AB หมายถึง ระยะทางระหว่างจุด A กับจุด B

1.4.6 $\overleftrightarrow{AB}$ หมายถึง เส้นตรงที่มีจุด A และจุด B

1.4.7 $\overline{AB}$ หมายถึง ส่วนของเส้นตรงโดยทีมีจุดเริ่มต้นที่จุด A และสิ้นสุดที่จุด B

1.4.8 $\overrightarrow{AB}$ หมายถึง รังสีที่มีจุดสิ้นสุดที่จุด A และผ่านจุด B

1.4.9 $\angle BAC$ หมายถึง มุมที่เกิดจากส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และส่วนของเส้นตรง $\overline{BC}$

1.4.10 ΔABC หมายถึง สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดคือจุด A จุด B และจุด C

1.4.11 $m\angle BAC$ หมายถึง ขนาดของมุม BAC

1.4.12 $\perp$ หมายถึง การตั้งฉาก สำหรับเส้นตรงกับเส้นตรง สำหรับเส้นตรงกับระนาบ หรือ สำหรับระนาบกับระนาบ

1.4.13 $\parallel$ หมายถึง การขนาน สำหรับเส้นตรงกับเส้นตรง สำหรับเส้นตรงกับระนาบ หรือ สำหรับระนาบกับระนาบ

1.4.14 $\angle A \cong \angle B$ หมายถึง $\angle A$ และ $\angle B$ สอดคล้องกัน

1.4.15 $ABC \leftrightarrow DEF$ หมายถึงการสมนัยกันระหว่างจุด A กับจุด D จุด B กับ E และจุด C กับจุด F

1.4.16 $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ หมายถึง ความสมนัยของ $ABC \leftrightarrow DEF$ ในความคล้ายคลึงกัน

1.4.17 $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ หมายถึง ส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และส่วนของเส้นตรง $\overline{CD}$ มีความสอดคล้องกับ

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ – นามสกุล (ภาษาไทย) เพียงพบ มนต์นวลปรางค์
(ภาษาอังกฤษ) Piangpob Monnuamprang

ประวัติการศึกษา ปริญญาเอก วิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี นครราชสีมา ประเทศไทย
ปีการศึกษา 2544

ตำแหน่งทางวิชาการ รองศาสตราจารย์ ระดับ 9 พ.ศ. 2549 - ปัจจุบัน

สังกัดคณะ มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์

ประสบการณ์การทำงาน/ตำแหน่งบริหารในมหาวิทยาลัย

1. ตำแหน่ง รองคณบดีฝ่ายวิชาการ วางแผนและวิจัย คณะครุศาสตร์ พ.ศ. 2549 - ปัจจุบัน
2. ตำแหน่ง รองผู้อำนวยการฝ่ายบริหาร ศูนย์วิทยาศาสตร์ พ.ศ. 2547 - 2549
3. ตำแหน่ง ประธานหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ พ.ศ. 2548 - ปัจจุบัน
4. ตำแหน่ง รองคณบดีฝ่ายวิจัยและวางแผน คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี พ.ศ. 2546 - 2548
5. ตำแหน่ง รองผู้อำนวยการสำนักวิจัยและบริการ พ.ศ. 2545 -2546
6. ตำแหน่ง หัวหน้าโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี พ.ศ. 2545 - 2548

มีความชำนาญงานด้าน Numerical Methods, Partial Differential Equations,
Fluid Dynamics

ผลงานทางวิชาการ

ผลงานทางวิชาการ

เพียงพบ มนต์นวลปรางค์. (2549). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** ปทุมธานี : มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์, 269 หน้า.

เพียงพบ มนต์นวลปรางค์.(2545). **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข.** ปทุมธานี : สถาบันราชภัฏเพชรบุรีวิทยาลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์, 239 หน้า.

ประวัติการได้รับทุน

1. ทุนศึกษาต่อระดับปริญญาเอก ***โครงการ พวส.*** ปีงบประมาณ 2541
2. ทุนสนับสนุนศึกษาต่อระดับปริญญาเอก ***สถาบันราชภัฏเพชรบุรีวิทยาลงกรณ์*** ปี 2539 – 2541
3. ทุนผู้ช่วยสอนและผู้ช่วยวิจัย ***มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี*** ปี 2539 – 2544
4. ทุนองค์กร ***CIMPA-UNESCO*** ในการประชุม School on Finite Elements: Theory and Applications ณ University Sains Malaysia ประเทศมาเลเซีย ระหว่างวันที่ 6 - 17 กันยายน 2542
5. ทุนสนับสนุนการทำวิจัย ***สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) ประเภททุนพัฒนาศักยภาพการทำงานวิจัยของอาจารย์รุ่นใหม่*** หลังจบปริญญาเอก ปี 2545
6. ทุน ***SEMEO-RECSEM*** ฝึกอบรมระยะสั้นคณิตศาสตร์ ณ ศูนย์ RECSEM เมือง Penang ประเทศมาเลเซีย ระหว่างวันที่ 16 กุมภาพันธ์ - 28 มีนาคม 2546
7. ทุน ***UNESCO-SEMEO-RECSEM*** ในการประชุมนำเสนอผลงานวิจัยในต่างประเทศ ในการประชุม World Conference on Science and Technology Education (ICASE 2003) ณ เมือง Penang ประเทศมาเลเซีย ระหว่างวันที่ 7 - 10 เมษายน 2546
8. ทุน ***CIMPA-UNESCO-ISFMA*** ในการประชุม School Differential Geometry : Theory and Applications ณ Fudan University เมือง Shanghai ประเทศจีน ระหว่างวันที่ 7 - 18 สิงหาคม 2549

9. ทุน ***CIMPA-JMAMIS-PHILIPPINES*** ในการประชุม School Numerical Methods for Partial Differential Equations ณ Ateneo de Manila University เมือง Manila ประเทศฟิลิปปินส์ ระหว่างวันที่ 27 สิงหาคม – 8 กันยายน 2550

ผลงานวิจัยที่พิมพ์ออกเผยแพร่

1. N.P. Moshkin and P. Mounnumprang, "On Numerical Algorithm for the Steady Euler Equations for Flowing-Through Problem", Proc. *The Fourth Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE'2000)*, March 27-29, 2000, Kasetsart University, Bangkok, Thailand. pp. 56-64.

2. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "A Numerical Method for Solving the Incompressible Euler Equations for Flowing-Through Problem", Proc. *The First National Symposium on Graduate Research (GRS-I)*, June 10-11, 2000, Chiangmai University, Chiangmai, Thailand. pp. 260-266.

3. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "On Numerical Simulation of Ideal Incompressible Fluid Flows Through Bounded Domain", Proc. *The Fifth Annual National Symposium on Conference in Mathematics*, November 2-3, 2000, Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand.

4. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, " Numerical Algorithm for Flowing-Through Problem for Euler Equations", Proc. *The First Conference on Mathematics*, December 4-6, 2000, Rajabhat Institute Mahasarakham, Mahasarakham, Thailand. pp. 196-202.

5. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "Numerical Algorithm for Ideal Incompressible Fluid Flows Through Bounded Domain", Proc. *The Second Conference Research Rajabhat*, December 6-7, 2000, Rajabhat Institute Pecthburiwittayalongkorn, Pathumthani, Thailand. pp. 171.

6. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "Numerical Simulation for the Steady Euler Equations in Curvilinear Coordinates", Proc. *The Second Conference Symposium on Graduate Research (GRS-II)*, April 25-26, 2001, Mahidol University, Bangkok, Thailand. pp. 78.

7. N.P. Moshkin and P. Mounnumprang, "Numerical Simulation of Ideal Incompressible Fluid Flows Through Bounded Domain When Tangent Components of Vorticity are Given on the Inflow parts of the Domain Boundary", Proc. *The Fifth Annual National Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE'2001)*, June 19-20, 2001, Bangkok Conventional Center (BCC), Central Plaza, Bangkok, Thailand. pp. 141-149.

8. N.P. Moshkin and P. Mounnumprang, "Numerical Simulation of Vortical Ideal Fluid Flow Through Curved Channel", *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* 2001, London, England. pp.1173-1189.

9. P. Mounnumprang "Numerical Algorithms for Flowing-Through Problem of an Ideal Incompressible Fluid", *Ph.D.Thesis*, 2001,Suranaree University of Technology, NakhonRatchsima, Thailand. P.126.

10. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "Numerical Algorithms for Flowing – Through Problem", *The 12th Annual National Symposium on Science and Mathematics*, January 14-15, 2002, Rajabhat Institute NakhonRatchsima, Thailand. pp. 230.

11. P. Mounnumprang P. Suwannapoo and N.P. Moshkin, "Numerical Algorithm in Two Dimensionnal Ideal Incompressible Inviscid Fluid Vortical Flow Through Curve Channel", Proc. *The Seventh Annual National Symposium on Conference in Mathe*matics, May 13-14, 2002, Prince of Songkla University, Songkla, Thailand. .

12. N.P. Moshkin and P. Mounnumprang, "Numerical Simulation of Vortical Ideal Fluid Flow Through Curved Channel", *International Computational Mathematics Application 2002*, 30 August - 3 September, 2002 , Dalian University of Technology, China..

13. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "A Numerical Algorithm for Vortical Flow of an Ideal Incompressible Fluid Through a Curved Channel", Proc. *The 28 Congress on Science and Technology of Thailand*, October 24-26, 2002, Queen Sirikit National Convention Center, Bangkok, Thailand. P.572.

14. P. Mounnumprang and N.P. Moshkin, "Convergence of Ideal Incompressible Fluid Vortical Flow Through Curved Channel with Exact Solution", Proc. *The 28 Congress on Science and Technology of Thailand*, November 15-16, 2002, Burapa University, Chonburi, Thailand. P35.

15. P.Mounnumprang and S.Witayangkurn, "Finite Difference Methods of Stationary Problem for Model of Advection – Diffusion of Air Pollution", 2002, *Rajabhat Institute Pecthburiwittayalongkorn*, Pathumthani, Thailand. pp. 47.

16. P. Mounnumprang " A Numerical Method for Solving the Incompressible Euler Equations for Flowing – Through Problem of Elbow Shape in Primitive Variables ", Proc. *การประชุม "นักวิจัยรุ่นใหม่...พบ...เมธีวิจัยอาวุโส"*, January 11-13, 2003, Falix Hotel, Kanjanaburi, Thailand.

17. P. Mounnumprang, " Numerical Method for Solving the Flowing – Through Problem of Ideal Incompressible Fluid Flow in Term of Primitive Variables ", *Asia Symposiam of Computational Mathematics 2003*, 23 –25 October, 2003 , Beijing University , Beijing, China.

18. P. Mounnumprang " Numerical Algorithm for Air Pollution Problems of Time Depedent ", Proc. *The 29 Congress on Science and Technology of Thailand,* October 20-22, 2003, Khoen Kean University, Khoen Kean, Thailand. P.SA-3.

19. P. Mounnumprang " A Numerical Method for Solving the Incompressible Euler Equations for Flowing – Through Problem of Elbow Shape in Primitive Variables ", Proc. *The Fifth Anniversary of Mae Fah Luang University Symposium,* December 18-19, 2003, Mae Fah Huang University, Chiangrai, Thailand. pp.Sc-P/11-1.

20. P. Mounnumprang " A Numerical Method for Solving the Incompressible Euler Equations for Flowing – Through Problem of Elbow Shape in Primitive Variables ", Proc. *การประชุม "นักวิจัยรุ่นใหม่...พบ...เมธีวิจัยอาวุโส"*, January 14-16, 2004, Falix Hotel, Kanjanaburi, Thailand.

21. P.Mounnumprang,N.P.Moshkin " Streamfunction-Vorticity Numerical Method for Flowing – Through Problem of Ideal Incompressible Fluid within 2D Domain ", Proc. *The eighth Annual National Symposium on Computational Science and Engineering*" July 21-23, 2004, Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand. P. 450-452.

22. P. Mounnumprang . " On Numerical Simulation of Internal Rotational Inviscid Flow " *Journal Guizhou Science* ,Vol. 24, No.3 , Sep.2006, Guizhou University , Guiyang, China. P 1-4.

23. P. Mounnumprang . "Nunerical Schemes for Ideal Incompressible Fliud Flow", Proc. *The 1st Joint International Conference on Information Communication Technology (JICT 2007),* Vol. 1, No.1 , December 19-22, 2007, National University Lao, Vientiane, Laos. P 114-119.

24. P. Mounnumprang . "Numerical Method For The Incompressible Euler Equations ", Proc. *The World Congress on Engineering 2008 (WCE 2008),* July 2-4, 2008, University South Kensington , London, England. Impress.